

システム制御理論テキスト

東京工業大学制御工学科
山北昌毅

目次

第 1 章 動的システムの記述	5
1.1 システムモデルの分類	5
1.2 外部記述によるシステム表現	6
1.3 内部記述に基づくシステム表現	9
1.3.1 線形動的システムの解	10
1.3.2 時不変線形システムの状態方程式と伝達関数	11
1.3.3 伝達関数と周波数伝達関数	12
1.3.4 既約分解表現と状態空間表現	13
1.3.5 ディスクリプタ表現によるシステム表現	17
1.3.6 一般化プラント	19
1.4 連続時間系の離散系表現	22
第 2 章 システムの特徴付け	29
2.1 状態空間表現と安定性	29
2.1.1 伝達関数のパラメータによる安定性の判定	30
2.1.2 周波数領域での安定性判別	34
2.1.3 リヤプノフの安定判別法	35
2.1.4 小ゲイン定理	37
2.2 感度関数・相補感度関数	39
2.3 可制御・可観測性	41
2.3.1 システムの極	41
2.3.2 可制御・可観測性とシステムの極	42
2.4 システムの零点	44
2.4.1 一入力一出力システムの零点	44
2.4.2 多入出力系の零点	44
第 3 章 制御系設計	53
3.1 状態フィードバックによるシステムの安定化	53
3.2 状態観測器	56
3.2.1 同次元オブザーバ	57
3.2.2 最小次元オブザーバ	57
3.2.3 推定された状態によるフィードバック系の特徴	59
3.3 最適レギュレータ	60
3.3.1 2次形式評価関数による最適レギュレータ	60
3.3.2 定常リカッチ方程式の解法	61

3.3.3	最適レギュレータの性質	63
3.4	サーボ系の設計	66
3.4.1	ステップ状目標値に対するフィードフォワード制御系	67
3.4.2	積分型最適レギュレータ	69
3.4.3	出力レギュレーションと内部モデル原理	71
第 4 章	むだ時間系の制御	77
4.0.4	Smith の補償器と IMC 構造	77
4.0.5	むだ時間を用いてシステムを離散化する方法	79
第 5 章	特異値分解と部分空間同定法	81
5.1	特異値分解 (SVD)	81
5.2	システムの連続化	83
5.3	モデルリダクションと部分空間同定法	85
5.3.1	マルコフパラメータからの推定とモデルリダクション	85
5.3.2	インパルス応答からの同定	86
5.3.3	一般の入出力からの同定	87

第1章 動的システムの記述

1.1 システムモデルの分類

制御系を設計する場合、対象とするプラントとのモデルを得ることは非常に重要である。特に、数学モデルを得ることは、対象のプラントの挙動を予測し、特性を解析する上で便利である。これは、設計者が対象としているプラントの数学モデルを得ることが出来れば、制御理論のような抽象的なシステムに対して展開された、解析及び設計の手法をそのまま適用することが出来るからである。(逆に、実システムを設計するという立場からは、解析、設計手法が整備されたシステムモデルで対象のプラントをモデル化することが重要であることを意味している。) 数学モデルを構成する方法には次の3つの方法が考えられる。[1]

1. 物理、化学的法則などによる解析的な方法
2. 数学的情報処理による方法
3. AIによる方法

(1)の方法は、実在のシステムを対象のプラントと環境に分割し、対象プラントを支配する物理的、化学的、力学的法則を用いて対象を記述する。この時、プラントの主要な基本要素に分割して考え、基本要素にそれぞれの法則を適用することにより全体のシステムモデルを構築する。(2)の方法は、対象のプラントの入出力を数学モデルに記述できる空間に対応させ、空間内の部分集合間の写像としてシステムを捉えるものである。(3)は主に狭義の数式モデルとルールで記述される特性を、知識ベースとして構築することにより対象プラントを記述するものである。

本章では、システム理論の中で用いられる、特に動的システムの数学モデルについて解説する。対象のプラントを数学的に記述するためには、我々が直接操作できる操作量と、実際に観測できる観測量の数学モデルを定義しなければならない。各物理量は、一般に実数に対応付けて考えるが、問題はそれが連続時間で定義されるか、離散時間で定義されるかである。この分類によって、モデルは大きく連続時間系と離散時間系に大別される。もちろん、物理法則による表現が連続時間で与えられる場合でも、離散時間系のシステムとして対象のシステムを記述する方が便利である場合もある。例えば、経済システム等は統計量が得られる間隔を単位として記述する方が都合が良い。

次に考えられる分類は、対象のプラントの外部記述を得るか、内部記述を得るかである。[2] 外部記述とは、対象のプラントを外に直接表れるもので特性を表現したものであり、一方、内部記述は状態という内部変数を用いて特性を記述したものである。(詳しいことは後述。)

また、上記の表現分類とは独立したものとして、プラントの挙動を確定的に捉えられるか、確率的に捉えるかの区別もある。以上の分類は対象のプラントの特性を記述するために、設計者が程度選択することが出来る表現方法である。これに対して、対象の特性に大きく依存する表現形態が、線形系か非線形系か、又は、集中定数系か分布乗数系かの違いである。更には、システムが一入出力(スカラ)系か多入力多出力系かの区別もある。以上の分類を表1.1にまとめる。

表1.1に記述された分類はそれぞれ独立する概念であるため、すべての組合せのシステム表現が可能である。従って、対象となるシステムをこれらの中から適当な性質を満たすものとしてモデル化することが出来る。以下では、応用範囲も広く、種々の概念を確立する上で非常に便利である(多入出力)時不変な確定連続線形システムについて詳しく述べる。

表 1.1: システムの分類

分類指標	分類されるシステム表現	分類指標	分類されるシステム表現
時間領域	連続時間系	入出力の数	スカラ系
	離散時間系		多入出力系
表現形式	外部記述	線形性の有無	線形システム
	内部記述		非線形システム
統計的性質	確定システム	定常性の有無	定常システム
	確率システム		非定常システム
空間的広がり	集中定数系	変数の表現領域	時間領域
	分布定数系		周波数領域

1.2 外部記述によるシステム表現

外部記述では、プラントの入出力関係を記述するモデルを決定するため、システムの内部にまでは立ち入らない。従って、対象のプラントをブラックボックスとみなして、入力と出力の関係を記述する数学モデルを構築する。このように対象を考えると、プラントは入力関数から出力関数を対応させる線形写像として扱うことが出来る。これを形式的に次のように表現する。

$$y = \eta + Lu, y(t) \in R^p, u(t) \in R^m \quad (1.1)$$

ただし、 η はゼロ入力に対応する出力であり、 Lu は u に対する出力である。(実際には、 y, u には強い仮定が設けられる、例えば、 u は区分的に連続な可測関数など。) このシステムに対して、因果律、定常性は次のように定義される。このために2つのオペレータを定義する。[3]

$$(P_\alpha u)(t) = \begin{cases} u(t) & t \leq \alpha \\ 0 & t > \alpha \end{cases} \quad (\text{打ち切りオペレータ}) \quad (1.2)$$

$$(T_\alpha u)(t) = \begin{cases} u(t - \alpha) & t \geq \alpha \\ 0 & t < \alpha \end{cases} \quad (\text{推移オペレータ}) \quad (1.3)$$

[定義 1.1]

L が次の性質を満たす時、 L は因果律を満たすという。

$$P_\alpha L = P_\alpha L P_\alpha \quad (1.4)$$

[定義 1.2]

L が次の性質を満たす時、 L は定常であるという。

$$T_\alpha L = L T_\alpha \quad (1.5)$$

このような L に対して、ある条件の下で次のような表現が可能であることが知られている。[3]

$$(Lu)(t) = \int_0^t h(t - \tau) u(\tau) d\tau \quad t > 0 \quad (1.6)$$

これは、入力 $u(\cdot)$ と重み関数 (weighing function) $h(\cdot)$ との畳み込み積分として L が表せることを示している。これにより、システムが重ね合わせの理を満たすことがわかる。実際、形式的に $u = \delta(t_1 - t) + \delta(t_2 - t)$ とすると、

$$Lu = \int_0^t h(t - \tau) \delta(t_1 - \tau) d\tau + \int_0^t h(t - \tau) \delta(t_2 - \tau) d\tau = h(t - t_1) + h(t - t_2) \quad (1.7)$$

ただし、 $\delta(\cdot)$ は Dirac のデルタ関数である。この関係を図 1.2 に示す。また、これより $h(\cdot)$ はインパルス応答で与えられ

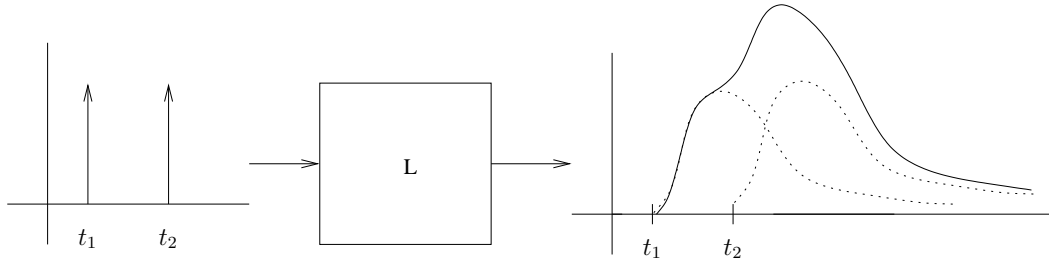


図 1.1: 重ね合わせの理

ることがわかる。次に、 L を周波数領域で表現する。つまり、伝達関数として表現する。伝達関数は入力信号と出力信号の Laplace 変換の比として与えられる。

$$Y(s) := \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{Lu\} = \mathcal{L}\{h\} \mathcal{L}\{u\} \quad (1.8)$$

ただし、

$$\mathcal{L}\{x\} := \int_0^{+\infty} x(t)e^{-st} dt$$

スカラ系の場合には、伝達関数は

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \quad (1.9)$$

と表現出来る。多入出力系の場合は、それぞれの対応する入出力の比となり、 m 入力、 p 出力のシステムでは $p \times m$ の伝達関数行列となる。

以下に制御理論で良く用いられる Laplace 変換に関連した性質を記載する。[4][5]

1. (線形性)

$$\mathcal{L}\{c_1 f_1 + c_2 f_2\} = c_1 \mathcal{L}\{f_1\} + c_2 \mathcal{L}\{f_2\}$$

2. (相似法則)

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right), \quad F(s) := \mathcal{L}\{f\}$$

3. (推移則)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t-\tau)\} &= e^{-s\tau} \mathcal{L}\{f\} \\ \mathcal{L}\{f(t+\tau)\} &= e^{s\tau} (\mathcal{L}\{f\} - \int_0^\tau f(t)e^{-st} dt) \end{aligned}$$

4. (積分法則)

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{s} \mathcal{L}\{f\}$$

5. (微分法則)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\} &= s\mathcal{L}\{f\} - f(0) \\ \mathcal{L}\{f^{(n)}\} &= s^n \mathcal{L}\{f\} - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0) s^{n-1-k} \end{aligned}$$

6. (合成則)

$$\mathcal{L}\{f * g\} = \mathcal{L}\{f\} \mathcal{L}\{g\}$$

ただし、 $f * g := \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$ である。

7. (反転公式)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)e^{st} ds$$

8. (初期値定理)

$$f(0_+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

9. (最終値定理)

$$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

ただし、 $sF(s)$ は閉複素右半面で解析的。

10. (Parseval の定理)

$$\int_0^{+\infty} f^2(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega$$

ただし、 $F(s)$ は $s = j\omega$ において定義されるものとする。

ここで Laplace 変換の有用性を示すために次の常微分方程式を Laplace 変換を用いて解く。

[例]

$$y'' - y = 2e^t$$

ただし、初期条件は $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$ とする。両辺を Laplace 変換して

$$\begin{aligned} s^2 Y(s) + sy(0) - y'(0) - Y(s) &= \frac{2}{s-1} \\ (s^2 - 1)Y(s) &= \frac{2}{s-1} + 2s + 1 = \frac{2s^2 - s + 1}{s-1} \\ Y(s) &= \frac{2s^2 - s + 1}{(s+1)(s-1)^2} \\ &= \frac{A}{s+1} + \frac{B_1}{s-1} + \frac{B_2}{(s-1)^2} \end{aligned}$$

$Y(s)$ が n 重根の α を根に持つとすると、 k 重根の係数を求めるには

$$c_k = \frac{1}{(n-k)!} \frac{d^{n-k}}{ds^{n-k}} ((s-\alpha)^n Y(s)) \Big|_{s=\alpha}$$

とすれば良い。(もちろん、係数比較を行なってもよしが。) これより、

$$\begin{aligned} A &= (s+1)Y(s) \Big|_{s=-1} = 1 \\ B_1 &= \frac{d}{ds} ((s-1)^2 Y(s)) \Big|_{s=1} = 1 \\ B_2 &= (s-1)^2 Y(s) \Big|_{s=1} = 1 \end{aligned}$$

これより、Laplace 逆変換をもちいて、

$$y(t) = 1e^{-t} + 1e^t + 1te^t$$

として、 $y(t)$ を代数演算と表引きにより簡単に求めることが出来る。

1.3 内部記述に基づくシステム表現

外部記述では、システムの入出力関係は次式で表された。

$$y = \eta + Lu \quad (1.10)$$

ここで、 η はゼロ入力に対応する出力であった。つまり、一般にシステムの出力は入力だけでは決定できないことがわかる。このようなゼロ入力を決定する (最小個数の) 量を状態変数と呼び次のように定義される。[2]

[定義 1.3](状態)

時刻 t_0 以後の入力 $u[t_0, t]$ が与えられたとき、出力 $y(t), t \geq t_0$ を一意的に定めるのに必要な最小個数 n 個の変数を状態変数といい、 n 個の状態変数を与える。このとき、 n をシステムの次数という。

ここで注意すべき点は、状態は必ずしもシステムの物理量に対応している必要はない点である。(これに対して、外部記述では実際に計測出来る量だけでシステムを記述している。) 状態変数は上記の性質を満たすものであれば何でも良いことになるが、以下では状態を n 次元ユークリッド空間 R^n である場合だけを考える。次にシステムを公理的に定義する。[7]

I を R^1 とし、 U, X, Y をノルム線形空間とする。 Ω を U の空でない集合とする。 $\phi : X \times I \times \Omega \times I \rightarrow X$ を写像とし、 X に関して線形で、 Ω に対して局所線形であるとする。また、 η を $X \times I$ から Y への線形写像とする。これより線形システム Σ を次のように表現する。

$$\Sigma = \{I, U, \Omega, X, Y, \phi, \eta\} \quad (1.11)$$

ここで、 U, X, Y はそれぞれ入力、状態出力の空間で、 Ω は実際に入力可能な許容入力の集合である。また、 ϕ を状態遷移写像 (State transition mapping)、 η を出力写像 (Output mapping) という。このとき、写像 ϕ は次式を満たす。

$$\phi(x(t_0), t_0, u(t), t_1) = x(t_1), \quad t \in [t_0, t_1] \quad (1.12)$$

このとき、次の公理を満たす Σ を動的システムという。

[公理 1](半群性)

$$\phi(x(t_0), t_0, u(t), t) = \phi(\phi(x(t_0), t_0, u(t), t_1), t_1, u(t), t) \quad (1.13)$$

[公理 2](因果性)

$$\phi(x(t_0), t_0, u_1(t), t_1) = \phi(x(t_0), t_0, u_2(t), t_1), \quad t_0, t_1 \in I, \quad t_1 > t_0 \quad (1.14)$$

$$\begin{aligned} u_1(t) &= u_2(t), \quad t \in [t_0, t_1] \\ u_2(t) &\neq u_2(t), \quad \text{otherwise} \end{aligned}$$

さらに、 ϕ, η が次の公理を満たすとき Σ は定常であるという。

[公理 3](定常性)

$$\phi(x(t_0), t_0, u(t), t_1) = \phi(x(t_0), t_0 + T, u(t), t_1 + T) \quad (1.15)$$

$$\eta(x(t_0), t_0) = \eta(x(t_0), t_0 + T), \quad t_0, t_1, T \in I \quad (1.16)$$

[公理 4]

空間 U は I 上の区分的連続関数 (piecewise-continous)。

公理1から公理3はシステムの性質を表現するものであるが、公理4はシステムに入力が存在する場合に、数学的に解の存在性と唯一性を保証するものである。

[定義 1.4](有限次元線形動的システム)

$X = R^n$ を満たす線形動的システムを有限次元線形動的システムという。更に、 $I = R^1$ の場合を連続時間システムといい、 I が R^1 の孤立点からなる集合の時、離散時間システムであるという。

1.3.1 線形動的システムの解

前説で与えられた公理的なシステム表現に対して、本節では微分方程式とその解によりシステムを具体的に表現する。ここでは前述のシステムより少し広いクラスのシステムから議論を始める。状態遷移関数 $\phi(\cdot)$ が次の微分方程式:

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x(t), u(t), t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (1.17)$$

の解によって一意的に与えられる場合、上式をシステムの状態方程式と呼ぶ。また、システムの出力が状態と入力との関数として表されるとし、

$$y(t) = g(x(t), u(t), t) \quad (1.18)$$

これをシステムの出力方程式と呼び、状態方程式と出力方程式を合わせてシステム方程式と呼ぶ。ここで、 x_0 と u より $x(\cdot)$ 、 $y(\cdot)$ が唯一存在することを保証するために、 $f(\cdot)$ は x に関してリプシッツ条件を満足し、 u, t に関して区分的に連続であることが仮定される。[7] $f(\cdot)$ 、 $g(\cdot)$ が x 、 u に関して線形である場合を線形動的システムといい、システム行列 $(A(t), B(t), C(t), D(t))$ により略記され、システム方程式は

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(t) \in R^n, \quad u(t) \in R^m \quad (1.19)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t), \quad y(t) \in R^p \quad (1.20)$$

として表される。 $A(\cdot)$ 、 $B(\cdot)$ 、 $C(\cdot)$ 、 $D(\cdot)$ が時不変であるときには (A, B, C, D) と略記することにする。ただし、 m は入力の数、 p は出力の数、 n はシステムの次数である。一般のシステムに関してその解を議論することは難しいが、(1.20) に関してはその解の性質が良く知られている。[2][7]

(1) 同次方程式の解

(1.20) の状態方程式で、 $u(t) = 0$ の同次方程式を考える。

$$\frac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t) \quad (1.21)$$

このとき、

$$x_1(t_0) = e_1 = [1, 0, \dots, 0]', \dots, x_n(t_0) = e_n = [0, 0, \dots, 1]' \quad (1.22)$$

の初期条件に対する解を $\phi_1(t, t_0)$ 、 \dots 、 $\phi_n(t, t_0)$ とする。このとき、

$$\Phi(t, t_0) := [\phi_1(t, t_0), \dots, \phi_n(t, t_0)] \quad (1.23)$$

を遷移行列という。この遷移行列は次の性質を持つことが知られている。

1. $\Phi(t, t_0)$ は次の行列微分方程式の唯一解である。

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t, t_0) = A(t)\Phi(t, t_0), \quad t \geq t_0 \quad (1.24)$$

$$\Phi(t_0, t_0) = I \quad (1.25)$$

2. $x(t_0) = x_0$ に対する同次方程式解は、遷移行列を用いて次のように表される。

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x_0 \quad (1.26)$$

3. 遷移行列は正則であり、次の等式を満たす。

$$\Phi(t, t_0) = \Phi^{-1}(t_0, t) \quad (1.27)$$

4. 遷移行列は次のように表すことが出来る。

$$\Phi(t, t_0) = I + \int_{t_0}^t A(\tau)d\tau + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau_1} A(\tau_1)A(\tau_2)d\tau_2d\tau_1 + \dots \quad (1.28)$$

特に、システムが時不変の場合には、 $\Phi(t, t_0)$ は $t - t_0$ の関数になり、 $t_0 = 0$ として次のように表される。

$$\Phi(t) = I + A + \frac{1}{2}A^2t^2 + \dots := e^{At} \quad (1.29)$$

(2) 非同次方程式の解

(1.20) で表される非同次方程式の解は遷移行列を用いて次のように表される。

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \quad (1.30)$$

次に簡単な例を示そう。

[例]

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & \omega(t) \\ -\omega(t) & 0 \end{bmatrix} x(t) \quad (1.31)$$

に対して遷移行列は次のように与えられる。

$$\Phi(t, t_0) = \begin{bmatrix} \cos\Omega(t) & \sin\Omega(t) \\ -\sin\Omega(t) & \cos\Omega(t) \end{bmatrix} \quad (1.32)$$

ただし、 $\Omega = \int_{t_0}^t \omega(\tau)d\tau$ である。

上の例は解析的に解が与えられたが、一般のシステムではこのように $\Phi(t, t_0)$ が陽な形で与えられる場合は稀である。一方、時不変のシステムに対しては次の節で述べるように簡単に求めることが出来る。

1.3.2 時不変線形システムの状態方程式と伝達関数

次の時不変システムのシステム方程式を考える。

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (1.33)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (1.34)$$

上式を Laplace 変換すると、

$$sX(s) - x_0 = AX(s) + BU(s) \quad (1.35)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s) \quad (1.36)$$

ただし、

$$X(s) := \mathcal{L}\{x\}, y(s) := \mathcal{L}\{y\}, U(s) := \mathcal{L}\{u\}$$

である。これより

$$X(s) = (sI - A)^{-1}x_0 + (sI - A)^{-1}BU(s) \quad (1.37)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s) \quad (1.38)$$

従って、システムの伝達関数は $x_0 = 0$ として

$$Y(s) = \{C(sI - A)^{-1}B + D\}U(s) \quad (1.39)$$

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (1.40)$$

と表現される。これより遷移行列 $\Phi(t)$ は $\mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}$ として計算されることがわかる。ここで注意すべきことは、 $H(s)$ は s の有理関数行列となることである。

1.3.3 伝達関数と周波数伝達関数

今、簡単のために1入力1出力のシステムを考え、その伝達関数を $H(s)$ とする。ただし、 $H(s)$ は複素閉右半面で解析的であるとする。このシステムに $u(t) = \sin\omega t$ を入力したとき、出力 $y(t)$ がどのようなになるか考える。 $u(t)$ を Laplace 変換すると、

$$U(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (1.41)$$

となる。したがって、出力 $y(t)$ の Laplace 変換は

$$Y(s) = H(s)\frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (1.42)$$

となる。これを部分分数展開すると

$$Y(s) = \frac{A}{s + j\omega} + \frac{B}{s - j\omega} + \sum R(s) \quad (1.43)$$

ただし、 $R(s)$ は安定な根の部分分数展開であり、

$$A = (s + j\omega)H(s)\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}\Big|_{s=-j\omega} = \frac{H(-j\omega)j}{2} \quad (1.44)$$

$$B = (s - j\omega)H(s)\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}\Big|_{s=j\omega} = -\frac{H(j\omega)j}{2} \quad (1.45)$$

$$(1.46)$$

となる。これを逆 Laplace 変換して、 $t \gg 0$ の部分を考えて、 $R(s)$ に対応する部分はゼロに収束するので、

$$y(t) \approx Ae^{-j\omega t} + Be^{j\omega t} \quad (1.47)$$

となる。ここで、

$$H(j\omega) = \text{Re}(j\omega) + j\text{Im}(j\omega) \quad (1.48)$$

とすると、

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \frac{1}{2} \{ (jRe(j\omega) + Im(j\omega))(\cos(\omega t) - j\sin(\omega t)) \\
 &\quad - (jRe(j\omega) - Im(j\omega))(\cos(\omega t) + j\sin(\omega t)) \} \\
 &= R(j\omega)\sin(\omega t) + Im(j\omega)\cos(\omega t) \\
 &= |H(j\omega)|\sin(\omega t + \phi), \quad \phi := \tan^{-1} \frac{Im(j\omega)}{Re(j\omega)} = \angle H(j\omega)
 \end{aligned} \tag{1.49}$$

となる。これは、伝達関数で表されるシステムでは、正弦波入力を入力とした場合、同じ周期の正弦波が振幅と位相だけを変えて出力されることを示している。また、その振幅と位相は伝達関数 $H(s)$ の $s = j\omega$ を入れたものにより簡単に計算されることがわかる。この $H(j\omega)$ のことを周波数伝達関数と呼ぶ。

1.3.4 既約分解表現と状態空間表現

伝達関数と多項式行列による既約分解表現

m 入力 p 出力のシステムの伝達関数 $H(s)$ が次のような多項式を要素とする行列の”比”で表され、

$$H(s) = D_L^{-1}(p)N_L(p) = N_R(p)D_R^{-1}(p) \tag{1.50}$$

ただし、 D_L と N_L は左既約、 D_R と N_R は右既約のときそれぞれを $H(s)$ の左既約分解 (l.c.f:left coprime factrization)、右既約分解 (r.c.f:right coprime factrization) という。(p は行列の要素が多項式であることを示している。) ここで左既約分解とは、つぎのような分解をした場合、

$$\begin{aligned}
 N_L &= U_L(p)N'_L(p) \\
 D_L &= U_L(p)D'_L(p)
 \end{aligned}$$

$U_L(p)$ としてはユニモジュラ行列しか取れない場合をいう。(ユニモジュラ行列とは行列式がゼロでない定数となるものである) また、右既約とは、

$$\begin{aligned}
 N_R &= N'_R(p)U_R(p) \\
 D_R &= D'_R(p)U_R(p)
 \end{aligned}$$

と表現できるのは $U_R(p)$ がユニモジュラ行列の場合だけのときである。この既約性の条件はつぎのランク条件に等しい。

左既約性:

$$\text{rank} [N_L(p) \ D_L(p)] = p \tag{1.51}$$

右既約性:

$$\text{rank} \begin{bmatrix} N_R(p) \\ D_R(p) \end{bmatrix} = m \tag{1.52}$$

左・右既約分解の求め方は、[8]

1. $H(s)$ に分母の最小公倍多項式 $\phi(s)$ を掛けて多項式行列 $P(p)$ を得る。

$$P(p) := \phi(s)H(s) \tag{1.53}$$

2. $P(p)$ に対して、左・右からユニモジュラ行列 $U_1(p)$ 、 $U_2(p)$ を掛けて次のようなスミス正準系を得る。

$$S(p) = U_1(p)P(p)U_2(p) = \begin{bmatrix} \gamma_1(s) & 0 & & & \\ & 0 & \gamma_2(s) & 0 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \gamma_r(s) \\ & & & & & 0 \\ & & & & & & \ddots \end{bmatrix} \quad (1.54)$$

$$\gamma_i(s) | \gamma_{i+1}(s) \quad (i = 1 \dots r-1) \quad (1.55)$$

ただし、 $\gamma_i(s) | \gamma_{i+1}(s)$ は γ_{i+1} が γ_i で割り切れることを示している。

3. $S(p)$ を $\phi(s)$ で割りスミス・マクミラン正準系を得る。

$$M(s) = \frac{S(p)}{\phi(s)} = \begin{bmatrix} \frac{n_1(s)}{d_1(s)} & 0 & & & \\ 0 & \frac{n_2(s)}{d_2(s)} & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \frac{n_r(s)}{d_r(s)} \\ & & & & & 0 \\ & & & & & & \ddots \end{bmatrix} \quad (1.56)$$

$$n_i(s) | n_{i+1}(s) \quad (i = 1 \dots r-1), \quad d_{i+1}(s) | d_i(s) \quad (i = 1 \dots r-1) \quad (1.57)$$

4. $M(s)$ を対角な多項式行列の”比”で表す。

$$M(s) = D_L^{-1}(p)N_L(p) = N_R(p)D_R^{-1}(p) \quad (1.58)$$

$$N_L(p) = \begin{bmatrix} n_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & n_r & \\ & & & 0 \end{bmatrix}, \quad D_L(p) = \begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & d_r & \\ & & & I_{p-r} \end{bmatrix} \quad (1.59)$$

$$N_R(p) = \begin{bmatrix} n_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & n_r & \\ & & & 0 \end{bmatrix}, \quad D_R(p) = \begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & d_r & \\ & & & I_{m-r} \end{bmatrix} \quad (1.60)$$

5. $H(s)$ を U_1 、 U_2 などを用いて表すことにより既約分解が得られる。

$$H(s) = U_1^{-1}D_L^{-1}N_LU_2^{-1} = U_1^{-1}N_RD_R^{-1}U_2^{-1} \quad (1.61)$$

$$D_L(p) = D_L(p)U_1(p), \quad N_L(p) = N_LU_2^{-1} \quad (1.62)$$

$$D_R(p) = U_2(p)D_R(p), \quad N_R(p) = U_1^{-1}N_R \quad (1.63)$$

この多項式行列による既約分解表現は、後に述べるシステムの極及びゼロに深く関わっているがここではこれ以上言及しない。

[例] 次式で与えられる伝達関数の既約分解表現を求める。

$$H(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{(s+1)(s-2)} \\ \frac{1}{s-2} & \frac{1}{(s-2)^2} \end{bmatrix}$$

1. $\phi(s) = (s+1)(s-2)^2$,

$$P(p) = \begin{bmatrix} (s-2)^2 & s-2 \\ (s+1)(s-2) & s+1 \end{bmatrix}$$

2.

$$U_1(p) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ s+1 & -(s-2) \end{bmatrix}$$

$$U_2(p) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -(s-2) \end{bmatrix}$$

3.

$$M(s) = \begin{bmatrix} \frac{3}{(s+1)(s-2)^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D_l(p) = D_r(p) = \begin{bmatrix} (s+1)(s-2)^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$N_l(p) = N_r(p) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4.

$$D_L(p) = \begin{bmatrix} -(s+1)(s-2)^2 & (s+1)(s-2)^2 \\ s+1 & -(s-2) \end{bmatrix}$$

$$N_L(p) = \begin{bmatrix} 3(s-2) & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D_R(p) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ (s+1)(s-2)^2 & -(s-2) \end{bmatrix}$$

$$N_R(p) = \begin{bmatrix} (s-2) & 0 \\ s+1 & 0 \end{bmatrix}$$

安定プロパーな有理関数行列による既約分解表現

前節では、伝達関数を多項式行列を用いて既約分解表現する方法を説明した。ここでは、安定化コントローラを自由パラメータを用いて表現する際に必要となる、安定プロパーな有理関数行列により伝達関数を既約分解表現する方法を説明する。ここで、安定とは全ての要素の有理関数の分母の零点が虚軸を含まない複素左半面に存在することであり、プロパーとは分母と分子の多項式の次数の差が0以上であることを意味している。安定な有理関数を要素とする行列と多項式を要素とする行列は代数的な構造が同じであるので、前節の条件式等はそのまま成立する。[13]しかし、実際に既約分解を代数的に求めることは容易ではないが、何らかの方法で

$$H(s) = D_L^{-1}(r)N_L(r) = N_R(r)D_R^{-1}(r) \quad (1.64)$$

と表せた時、

$$\begin{bmatrix} X_L & -Y_L \\ -N_L & D_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_R & Y_R \\ N_R & X_R \end{bmatrix} = I \quad (1.65)$$

を満たすような安定プロパーな有理関数を要素とする (X_L, Y_L) 、 (X_R, Y_R) が存在すればこれは既約分解表現となる。ここで、(1.65) 式を Bezout 方程式と呼び、(1.65) 式を満たす分解表現を重既約分解表現 (Double Coprime Factorization) と呼ぶ。[12][13]

[例]

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{s-1}{s(s-2)} \\ D_R(r) &= D_L(r) = \frac{s(s-2)}{(s+1)^2} \\ N_R(r) &= N_L(r) = \frac{(s-1)}{(s+1)^2} \\ X_R(r) &= X_L(r) = \frac{s^2+6s-23}{(s+1)^2} \\ Y_R(r) &= Y_L(r) = \frac{-41s+1}{(s+1)^2} \end{aligned}$$

しかし、この (X_L, Y_L) 、 (X_R, Y_R) を式の変形により求めることは難しいが、システムを状態空間表現することにより容易に計算することができる。実際、 (A, B) を可安定、 (C, A) を可検出として (この条件については後述する)、

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (1.66)$$

と表現する。このとき

$$A_F := A + BF, \quad C_F := C + DF \quad (1.67)$$

ただし、 A_F の固有値の実部は全て負、として (N_R, D_R) 、 (X_R, Y_R) は次式により求まる。

$$N_R(r) = C_F(sI - A_F)^{-1}B + D, \quad D_R(r) = F(sI - A_F)^{-1}B + I \quad (1.68)$$

$$X_R(r) = -C_F(sI - A_F)^{-1}H + I, \quad Y_R(r) = -F(sI - A_F)^{-1}H \quad (1.69)$$

また、左既約分解は

$$A_H := A + HC, \quad B_H := B + HD \quad (1.70)$$

ただし、 A_H の固有値の実部は全て負、として (N_L, D_L) 、 (X_L, Y_L) は次式により求まる。

$$N_L(r) = C(sI - A_H)^{-1}B_H + D, \quad D_L(r) = C(sI - A_H)^{-1}H + I \quad (1.71)$$

$$X_L(r) = -F(sI - A_H)^{-1}B_H + I, \quad Y_L(r) = -F(sI - A_H)^{-1}H \quad (1.72)$$

安定化コントローラのパラメトリゼーション

前節の述べた既約分解を用いると、対象のプラントを安定化する全てのコントローラを一つの自由パラメータによって表現できる。このパラメトリゼーションは次の定理で与えられる。

[定理](Youla パラメトリゼーション)

この例からわかるように、ディスクリプタ方程式は動的システムを記述する十分な能力を持っていることがわかる。この例では入っていないが、純粋な微分器が含まれていても同様に記述することが出来、これが状態方程式と大きく異なる点である。この例のように、ディスクリプタ方程式の中には、システム内の物理パラメータがそのまま保存されている。このため、システムの構造やパラメータ変化に関する議論にはディスクリプタ表現が適していることが知られている。

例を見てもわかることであるが、ディスクリプタ表現の中には一般に代数方程式を含む。このため、変数を減らして低次元のシステムとして表現出来る場合が多い。例の場合には次のように表すことが出来る。

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{v}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ -d & -1 & (1-d) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ v_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u \quad (1.80)$$

$$y = \begin{bmatrix} d & 1 & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ v_1 \end{bmatrix} \quad (1.81)$$

さらに、 $d \neq 1$ を仮定すると、

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{v}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 + d/(1-d) & 1/(1-d) \\ d/(1-d) & -3/(1-d) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ v_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/(1-d) \\ 1/(1-d) \end{bmatrix} u \quad (1.82)$$

$$y = \begin{bmatrix} d/(1-d) & (2-d)/(1-d) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ v_1 \end{bmatrix} + [d/(1-d)] u \quad (1.83)$$

と書くことが出来る。ところが、 $d = 1$ の場合には、

$$\dot{z}_1 = -3z_1 - 1.5u - 0.5\dot{u} \quad (1.84)$$

$$y = -z_1 - 2.5u - 0.5\dot{u} \quad (1.85)$$

となり、(1.84) の形では表現できないことがわかる。これより (1.77) の表現は (1.84) の表現よりも広いクラスのシステムを記述することが出来る。このことがわかる。

次に (1.77) で表現されたシステムの解について考える。 $z(0_-) = z_0$ とし、 $u(t) (t \geq 0)$ を区分的に連続で Laplace 変換可能な関数とすると、両変を Laplace 変換し、

$$(sE - A)Z(s) = Ez_0 + BU(s) \quad (1.86)$$

これより、 $z(s)$ が唯一に定まるためには $sE - A$ が正則でなければならぬことがわかる。ここで注意しなければならないのは、 $(sE - A)^{-1}$ がプロパーとなるとは限らないことである。これより解が δ 関数やその微分を含むことがある。例えば、

$$(sE - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.87)$$

これをもう少し解析しよう。今、 $sE - A$ (形のマトリックスをマトリックスペンシルという。) の性質を使う。つまり、

$$M(sE - A)N = \begin{bmatrix} sI_r - F & 0 \\ 0 & I_{n-r} - sL \end{bmatrix} \quad (1.88)$$

とする正則行列 M 、 N が存在し、 L はベキ零のマトリックスとなる。(1.77) で $z_0 = 0$ として左から M を作用し、

$$N^{-1}Z(s) =: \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad (1.89)$$

と定義すると、

$$M(sE - A)NN^{-1}Z(s) = MBU(s) = \begin{bmatrix} G \\ -H \end{bmatrix} U(s) \quad (1.90)$$

これより、

$$\begin{bmatrix} sI_r - F & 0 \\ 0 & I_{n-r} - sL \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} GU(s) \\ -HU(s) \end{bmatrix} \quad (1.91)$$

となり、時間領域で表現すると、

$$\dot{z}_1 = Fz_1 + Gu \quad (1.92)$$

$$L\dot{z}_2 = z_2 + Hu \quad (1.93)$$

となる。これより、 z_1 に関しては一般の状態空間表現であるので、解は前節の議論と同様に求められる。この z_1 は指数モードと呼ばれる。一方、 z_2 は、

$$Z_2(s) = (sL - I_{n-r})^{-1}Lz_{20} + (sL - I_{n-r})^{-1}HU(s) \quad (1.94)$$

ここで、 L がベキ零であるので、 $(sL - I_{n-r})^{-1}$ は有限級数に展開でき、それを用いると、

$$Z_2(s) = -\sum_{i=0}^{p-2} s^i L^{i+1} z_{20} - \sum_{i=0}^{p-1} s^i L^i HU(s) \quad (1.95)$$

ただし、 p は $L^p = 0$ を満たすベキ指数である。これより

$$z_2(t) = -\sum_{i=0}^{p-2} \delta^{(i)}(t) L^{i+1} z_{20} - \sum_{i=0}^{p-1} L^i H u^{(i)}(t) \quad (1.96)$$

となる。従って、 $L \neq 0$ であると $z(t)$ は δ 関数やその微分を成分に含むことになる。このような z_2 をインパルスモードと呼ぶ。このようにディスクリプタ表現されたシステムでは一般に2つのモードを含み、次章で述べる可制御等の概念それに応じて使い分ける必要がある。ここでは詳しいことには触れないが (1.77) が可制御であるための必要十分条件は (F, G) 、 (L, H) がそれぞれ可制御であることが知られている。

1.3.6 一般化プラント

前節で述べたシステム方程式は、システムを外部の変数、つまり入力 u と出力 y それに内部状態を表す状態変数 x だけで記述されていた。もちろんこの表現によって広いクラスのシステムを表現できるが、システムへの入力は全て u として考えなければならず、例えば状態外乱なども u の要素として考えなければならない。また、システムの出力は y であり、その要素が観測量であるのか制御量であるのかの区別も外見上わからない。これに対して、外乱や制御入力、評価出力や観測量を明示的に区別してシステムを表記する方法がある。これは一般に次のように表される。[10][11]

$$\dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u \quad (1.97)$$

$$z = C_1 x + D_{11} w + D_{12} u \quad (1.98)$$

$$y = C_2 x + D_{21} w + D_{22} u \quad (1.99)$$

ここで、 $x \in R^n$ は状態、 $w \in R^{m1}$ は外乱または目標値、 $u \in R^{m2}$ は制御入力、 $z \in R^{p1}$ は評価出力、 $y \in R^{p2}$ は観測量である。この表現は次のようにも略記される。

$$\left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array} \right] \tag{1.100}$$

これを Doyle の表記法と呼ぶことがある。実際の設計では z と u の適当なノルムを評価関数として制御系が構成されることになる。また、これに対応してシステムの伝達関数も次のように分割される。

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \tag{1.101}$$

ただし、

$$P_{ij} = C_i(sI - A)^{-1}B_j + D_{ij} \tag{1.102}$$

である。

例を示そう。図 1.3.6 のフィルタ問題を考える。つまり、ノイズ n に汚された信号 y から元の信号 s を復元することを考える。この系に対する一般化プラントの伝達関数を求める。ここで、 z 、 u 、 w_1 、 w_2 をそれぞれ図 1.3.6 のように考

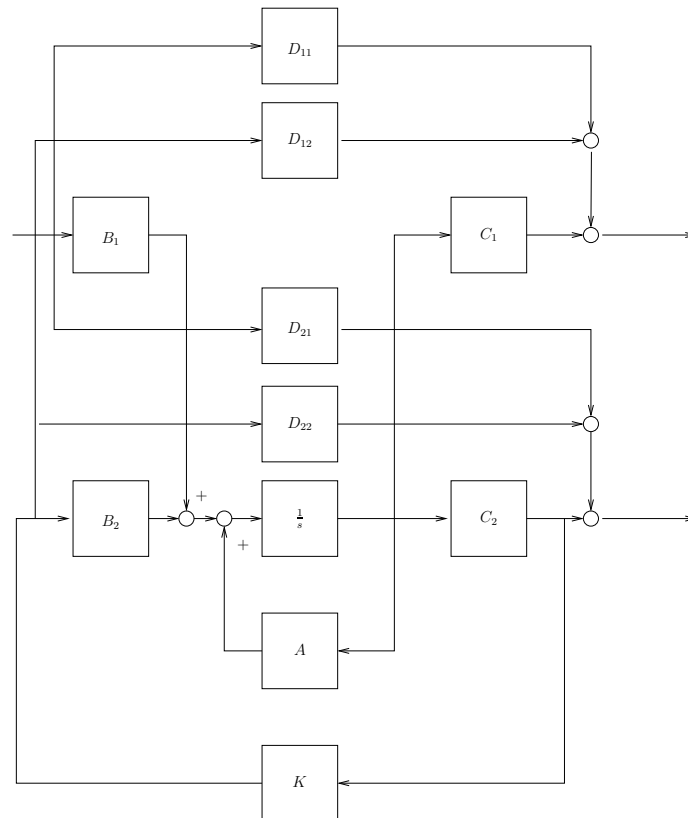


図 1.3: 一般化プラントのブロック線図

える。

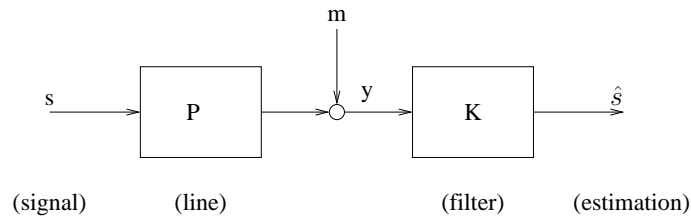


図 1.4: フィルタ問題

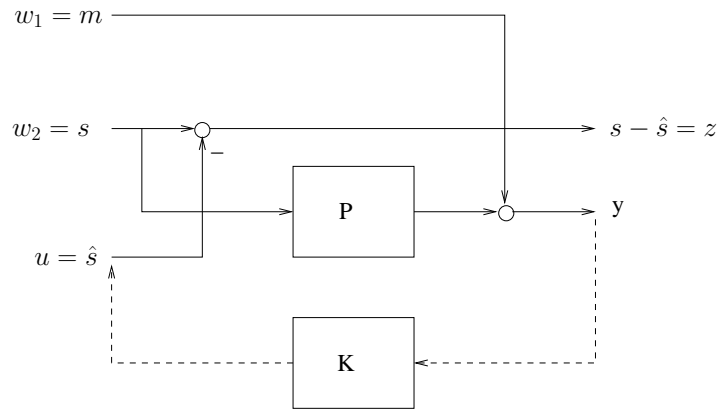


図 1.5: フィルタ問題の一般化プラントによる表現

これより

$$z = w_2 - u \tag{1.103}$$

$$y = Pw_w + w_1 \tag{1.104}$$

または、

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & -1 \\ 1 & P & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ u \end{bmatrix} \tag{1.105}$$

となる。更に、 P がシステム行列として (A, b, c, d) を持つとすると、システムは次の方程式で表される。

$$\dot{x} = Ax + b_2w_2 \tag{1.106}$$

$$y = c_2x + 1w_1 + dw_2 \tag{1.107}$$

$$z = 1w_2 - 1u \tag{1.108}$$

これより、

$$\left[\begin{array}{ccc|c} A & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ \hline c & 1 & d & 0 \end{array} \right] \tag{1.109}$$

というように定式化できる。

1.4 連続時間系の離散系表現

前節まででは、連続時間系の数学的表現について説明した。しかし、実際の制御を行なう際には、計算機を用いたいわゆるデジタル制御系を構成する場合も多い。本節ではデジタル制御系を解析・設計するのに必要となるシステムの離散化とパルス伝達関数について説明する。ただし、時不変線形システムだけを取り扱う。ここで考えているデジタル制御系は、図 1.4 に示すようなプラントの出力をサンプル周期 T で観測し、その値を用いて同じ周期で制御入力を計算しゼロ次ホールダ (Z.O.H) を通してプラントに加えるようなシステムである。ここでゼロ次ホールダとは、入力の値をアナログ的に一定時間 (このシステムの場合 T) 保持しておく要素である。

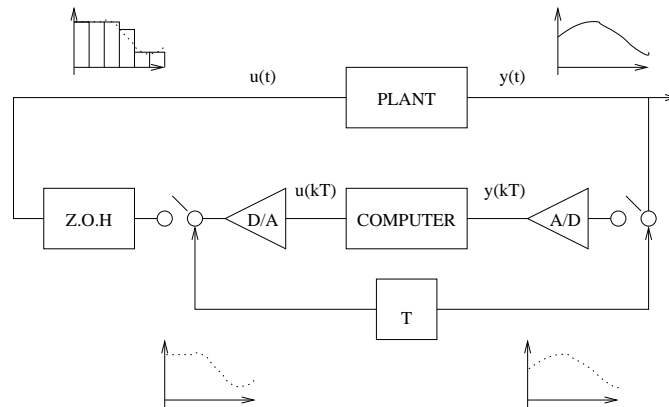


図 1.6: 取り扱うデジタル制御系

システムの離散化

まず、システムの解析を簡単にするために、プラントを入力列 $\{u(kT)\} (k=0, \dots)$ から出力列 $\{y(kT)\}$ へ変換するものとしてモデル化する。対象のシステムが次の状態空間表現で与えられるものとする。

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \quad x(0) = x_0 \\ y &= Cx + Du \end{aligned}$$

このプラントに、ゼロ次ホールダの出力を入力した場合の出力列 $\{y(kT)\}$ は微分方程式の解より簡単に計算できる。入力 $u(t)$ がゼロ次ホールダにより生成されているので、プラントへの入力は次式で与えられる。

$$u(t) = u(kT) \quad (kT \leq t < (k+1)T) \quad (1.110)$$

また、(1.30) より $u(t)$ に対するプラントの出力は $y(t)$ は

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \quad (1.111)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (1.112)$$

で与えられる。従って、時刻 $t = kT$ での出力は上式の t に kT を代入して

$$x(kT) = e^{AkT}x_0 + \int_0^{kT} e^{A(kT-\tau)}Bu(\tau)d\tau \quad (1.113)$$

$$y(kT) = Cx(kT) + Du(kT) \quad (1.114)$$

と与えられる。次に、 $t = (k+1)T$ の出力も同様に

$$x((k+1)T) = e^{A(k+1)T}x_0 + \int_0^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)}Bu(\tau)d\tau \quad (1.115)$$

$$y((k+1)T) = Cx((k+1)T) + Du((k+1)T) \quad (1.116)$$

として与えられるが、(1.110) の条件を用いると、システムを簡単な差分方程式に書き直すことができる。実際、

$$\begin{aligned} x((k+1)T) &= e^{AT}e^{AkT}x_0 + e^{AT}\int_0^{kT} e^{A(kT-\tau)}Bu(\tau)d\tau \\ &\quad + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)}Bu(\tau)d\tau \end{aligned} \quad (1.117)$$

となり、 $u(t)$ が $[kT, (k+1)T)$ で一定値 $u(kT)$ を取ることを考慮すると、

$$x((k+1)T) = e^{AT}x(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)}Bu(\tau)d\tau \quad (1.118)$$

となる。更に、上式右辺第二項は、

$$\int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)}Bu(\tau)d\tau = \int_0^T e^{A\tau}d\tau Bu(kT) \quad (1.119)$$

と変形できる。ここで、

$$\Phi := e^{AT} \quad \Gamma := \int_0^T e^{A\tau}d\tau B \quad (1.120)$$

と定義すると、 $y(kT)$ は $(x(kT), u(kT))$ を用いて

$$x((k+1)T) = \Phi x(kT) + \Gamma u(kT) \quad (1.121)$$

$$y(kT) = Cx(kT) + Du(kT) \quad (1.122)$$

と差分方程式により表される。ここで、 (Φ, Γ) はサンプリング・インターバル T が決まれば定数行列として計算できることに注意する。これより、連続系の入出力関係がサンプル点での値だけを考えれば、(1.121) の差分方程式によって完全に記述されることがわかる。ここで、 (A, B) から (Φ, Γ) を求める操作のことをシステムを離散化 (discretize) するという。また、サンプル点間での挙動が必要であれば、その値は

$$x(kT + \tau) = e^{A\tau}x(kT) + \int_0^\tau e^{A\tau}drBu(kT), \quad (0 \leq \tau < T) \quad (1.123)$$

$$y(kT + \tau) = Cx(kT + \tau) + Du(kT) \quad (1.124)$$

により計算できる。

z 変換とパルス伝達関数

前節では、連続時間系を離散系の差分の状態空間表現で表す方法について説明した。もちろん、このモデルを用いてシステムの解析・設計をすることが良く行なわれるようになって来ているが、連続系で伝達関数を用いるように、離散系の入出力関係に着目したモデルを用いられる場合もある。本節では、プラントを入力列 $\{u(kT)\}$ から出力列 $\{y(kT)\}$ へ直接変換するシステムとして記述する方法について述べる。このために、まず差分方程式を解く方法について説明する。この解法には、連続系の微分方程式を解く時に Laplace 変換を用いたのと同様に、 z 変換を用いる。数列 $\{x(kT)\}$ が与えられた時、その z 変換は次の定義で与えられる。

[定義] z 変換

$$\mathcal{Z}\{f(kT)\} := F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k} \quad (1.125)$$

制御系解析で良く用いられる z 変換の性質を以下に示す。

1. (線形性)

$$\mathcal{Z}\{c_1f_1 + c_2f_2\} = c_1\mathcal{Z}\{f_1\} + c_2\mathcal{Z}\{f_2\}$$

2. (推移則)

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{f((k+n)T)\} &= z^n(\mathcal{Z}\{f\} - \sum_{l=0}^{n-1} f(lT)z^{-l}) \\ \mathcal{Z}\{f((k-n)T)\} &= z^{-n}\mathcal{Z}\{f\} \end{aligned}$$

3. (合成則)

$$\mathcal{Z}\{f * g\} = \mathcal{Z}\{f\} \cdot \mathcal{Z}\{g\}$$

ただし、

$$f * g := \sum_{l=0}^k f((k-l)T)g(lT)$$

4. (反転公式)

$$f(kT) = \frac{1}{2\pi j} \oint F(z)z^{k-1}dz$$

5. (初期値定理)

$$f(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$$

6. (最終値定理)

$$f(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})F(z)$$

7. (Parseval の定理)

$$\sum_{k=0}^{\infty} f^2(kT) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F(e^{j\theta})|^2 d\theta$$

この z 変換を用いて、連続系の伝達関数が入出力信号の Laplace 変換の比として定義されたのと同様に、入出力数列間の関係を表すパルス伝達関数はそれぞれの数列の z 変換の比として定義される。このパルス伝達関数は、(1.121) を z 変換することによって簡単に得られる。実際、

$$zX(z) - zx(0) = \Phi X(z) + \Gamma U(z) \quad (1.126)$$

となり、 $x(0) = 0$ とすると

$$X(z) = (zI - \Phi)^{-1}\Gamma U(z)$$

となる。従って、パルス伝達関数は、

$$H(z) = C(zI - \Phi)^{-1}\Gamma + D \quad (1.127)$$

となる。

[例] 次のシステムを Z.O.H により T 秒で離散化し、そのパルス伝達関数を求める。

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= [1 \ 0]x \end{aligned}$$

このシステムに対する差分の状態方程式は、

$$\begin{aligned} \Phi &= I + A + 0 + \dots = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \Gamma &= \int_0^T e^{A\tau} B = \int_0^T (I + A\tau) B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}T^2 \\ T \end{bmatrix} \end{aligned}$$

従って、求めるパルス伝達関数は、

$$H(z) = [1 \ 0] \left(zI - \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}T^2 \\ T \end{bmatrix} = \frac{T^2(z+1)}{2(z-1)^2}$$

となる。

パルス伝達関数と周波数特性

前節では、入出力数列間を関連付けるものとしてパルス伝達関数を考えた。このパルス伝達関数には、時間の概念がなく T に無関係な関数である。実際の制御を考えるとき、プラントの周波数特性を考えることは非常に重要であるが、このままでは周波数特性を考えることはできない。ここでは、パルス伝達関数から、プラントの周波数特性を決定する方法を考える。

一般に、安定な一入力一出力の時不変連続系に入力として、

$$u(t) = \sin(\omega t) \quad (1.128)$$

を入れると、定常状態での出力は振幅と位相が異なったものとして次式で与えられる。

$$y(t) = |H(j\omega)| \sin(\omega t + \text{Arg}H(j\omega)) \quad (1.129)$$

ただし、 $H(s)$ は対象の伝達関数である。このとき $H(j\omega)$ を周波数伝達関数と呼ぶ。つまり、安定なシステムの場合、伝達関数の s に $j\omega$ を入れたものが周波数伝達関数となる。この周波数伝達関数は、上式よりも明らかなように、 ω という周波数成分がプラントを通過することによって振幅と位相がどのようなになるかの情報を持っている。

つぎにこの周波数伝達関数が、パルス伝達関数で表されるシステムではどのようなになるかを考える。今、入力として、

$$u(kT) = \sin \omega kT \quad (1.130)$$

をパルス伝達関数 $H(z)$ を持つシステムに入れるとする。このとき出力は、

$$U(z) = \mathcal{Z}\{u(kT)\} = \frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1} \quad (1.131)$$

$$Y(z) = H(z)U(z) \quad (1.132)$$

より、 $Y(z)$ を逆 z 変換して、

$$\begin{aligned} y(kT) &= \mathcal{Z}\left\{H(z)\frac{z\sin\omega T}{z^2 - 2z\cos\omega T + 1}\right\} \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint H(z)\frac{z\sin\omega T}{z^2 - 2z\cos\omega T + 1} dz \end{aligned} \quad (1.133)$$

$H(z)$ が単位円周上に極を持たないとする

$$y(kT) = \frac{H(e^{j\omega})e^{j\omega kT}}{2} - \frac{H(e^{-j\omega})e^{-j\omega kT}}{2} + \sum_{|\alpha|<1} R(\alpha)\alpha^k \quad (1.134)$$

となる。更に、 k が十分大きいところでは上式第3項は消えて、

$$y(kT) = |H(e^{j\omega T})| \sin(\omega kT + \text{Arg}H(e^{j\omega T})) \quad (1.135)$$

となる。つまり、 $H(z)$ の周波数伝達関数はパルス伝達関数の z に $e^{j\omega T}$ を入れたものになる。更に、 $H(e^{j\omega T})$ は ω を $\omega + \omega_s$ 、ただし、

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T} \quad (1.136)$$

としても、

$$H(e^{j(\omega+\omega_s)T}) = H(e^{j\omega T}) \quad (1.137)$$

となる。つまり、 $H(z)$ の周波数特性は ω_s の周期関数となっていることが分かる。これは入力信号として、

$$u(t) = \sin(\omega + \omega_s)kT \quad (1.138)$$

という信号を入れても、サンプリング操作により $u(t) = \sin\omega kT$ と区別がつかなくなることに起因している。このように、サンプリングすることによって実際の周波数が ω_s の整数倍だけ異って見える現象をエイリアシング (aliasing) 現象という。このエイリアシング現象はサンプリング定理と密接な関係があるがここではこれ以上言及しない。

離散系に対する解析・設計はここで述べた差分状態方程式やパルス伝達関数を用いて、後に述べる連続系に対するものとほぼ同様にできるが本書では詳しくは述べない。

参考文献

1 章

1. 増淵 正美:モデリングと制御系設計、計測と制御、Vol. 27,No. 4
2. 古田, 佐野:基礎システム理論、(コロナ社)
3. I.Sandberg:Linear Maps and Impulse Responses,IEEE Trans. on Circuits and Systems, Vol. 35, No. 2,(1988)
4. 絹川 正吉:フーリエ解析 例題演習、(北森出版)
5. 長谷川健介:制御理論入門、(昭晃堂)
6. 児玉、須田:システム制御のためのマトリックス理論、計測自動制御学会
7. J.R.Leigh: Functional Analysis and Linear Control Theory, Academic Press,(1980)
8. 須田 信英:極と零点、計測と制御、Vol. 17,No6,No8,(1978)
9. 池田 雅夫:Descriptor 形式に基づくシステム理論、計測と制御、Vol. 24, No. 7,(1985)
10. 木村 英紀:LQG から H^∞ へ、計測と制御、Vol. 29, No. 2,(1990)
11. 三平、美多:状態空間による H^∞ 制御の解法、計測と制御、Vol. 29, No. 2,(1990)
12. B.A.Francis:A Course in *H_{infinity}* Control Theory, Springer-Verlag(1987)
13. M.Vidyasagar:Control System Synthesis, MIT Press(1985)

第2章 システムの特徴付け

前節ではシステムの表現方法を、時不変線形システムについて特に詳しく述べた。本節では、システムを特徴付ける量及びその計算法について述べる。システムを設計する上で最も基本的かつ重要な性質はシステムが安定であるか否かである。非常に特殊な場合を除いて、システムは安定 (漸近安定) である必要がある。ここで最初にシステムの安定性とその決定法について解説する。

2.1 状態空間表現と安定性

まず最初に、システム方程式表現とその安定性についてみよう。今、次のシステムを考える。

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0 \quad (2.1)$$

$$y = Cx + Dy \quad (2.2)$$

このシステムのゼロ入力に対する初期状態 x_0 の解は次のように与えられた。

$$x(t) = \phi(t, x_0, 0) = e^{At}x_0 \quad (2.3)$$

このとき

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\phi(t, x_0, 0)\| = \infty \quad (2.4)$$

となる x_0 を不安定な初期状態といい、不安定な初期状態をもたないとき、システムは安定であるという。さらに、すべての初期状態に対して

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\phi(t, x_0, 0)\| = 0 \text{ for all } x_0 \in R^n \quad (2.5)$$

のときシステムは漸近安定であるという。

[定理 2.1] 時不変線形系の漸近安定性

システム (2.2) が漸近安定である必要十分条件は、特性方程式

$$\det(sI - A) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_0 = 0 \quad (2.6)$$

の根の全ての実部が負であることである。

この定理により、システムの安定性を判別するためには、システム行列 A の固有値を計算すればよいことがわかる。ここで注意しなければならないのは、この定理は時変形に対しては成立しないことである。次にその例を示す。

[例][3]

$$A(t) = \begin{bmatrix} a\cos^2(t) - 1 & 1 - a\sin(t)\cos(t) \\ -1 - a\sin(t)\cos(t) & a\sin^2(t) - 1 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

$$\Phi(t, 0) = \begin{bmatrix} e^{(a-1)t}\cos(t) & e^{-t}\sin(t) \\ -e^{(a-1)t}\sin(t) & e^{-t}\cos(t) \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

これより

$$x(t) = \Phi(t, 0)x_0 \quad (2.9)$$

で $1 < a < 2$ とすればシステムは明らかに不安定である。ところが、 $A(t)$ の固有値は

$$\det(sI - A(t)) = s^2 + (2 - a)s + 2 - a \quad (2.10)$$

$$= s^2 + 2\alpha s + 2\alpha, \quad \text{ただし } \alpha = 1 - a/2 \quad (2.11)$$

よって、

$$s = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha} \quad (2.12)$$

であり、 $0 < \alpha < 1/2$ に対しては s は共役で安定となる。

これに対して、時変系の安定性は次の定理で与えられる。

[定理 2.2]

システム Σ が漸近安定であるための必要十分条件は

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\Phi(t, 0)\| = 0 \quad \text{ただし、} \|A\| := \sup \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \quad (2.13)$$

である。

上述の A マトリックスを用いた安定判別の方法では A のパラメータ変化に対してその固有値を逐次計算しなければならない。これに対して、開ループシステムが伝達関数として与えられているときに、閉ループ系が安定となるか否かのチェックを実際に特性根を計算しないで行なう方法を述べる。(もちろん A マトリックスが特殊な形をしていればそのまま用いることができる)。これらは、古典制御理論で良く用いられるものであるが、ロバスト安定性を議論する際に必要となるのでここで概説する。

2.1.1 伝達関数のパラメータによる安定性の判定

今、一入力一出力のシステムの伝達関数が次のように与えられているとする。

$$G(s) = \frac{n(s)}{d(s)} \quad (2.14)$$

ただし、

$$\begin{aligned} n(s) &= \sum_{i=0}^m b_i s^{m-i} \\ d(s) &= \sum_{i=0}^n a_i s^{n-i}, \quad a_0 = 1 \end{aligned}$$

(1) フルビッツの安定判別法

まず、分子多項式の係数よりなるつぎのようなフルビッツ行列を作る。

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_3 & \dots & a_n \\ 1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ & a_1 & \dots & \\ & 1 & \dots & \\ & & \dots & a_n \\ & & \dots & a_{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

この行列 H に対して、小行列式 Δ_i を H の左上限より計算する。

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= a_1 \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} \\ &\cdot \\ &\cdot \\ \Delta_n &= |H|\end{aligned}$$

この時、システムが漸近安定であるための必要十分条件は $\Delta_i > 0 (i = 1, \dots, n-1)$ である。この方法は、そのパターンが記憶しやすいが、行列 H が大きくなる小行列式を計算するのが大変である。

(2) ラウスの安定半別法

次のようなラウスの表を作る。

$$\begin{array}{ccccccc} & 1 & & a_2 & & a_4 & a_6 & \dots \\ C_{11} = a_1 & & C_{12} = a_3 & & C_{13} = a_5 & & \dots & \\ C_{22} & & C_{23} & & \dots & & & \\ C_{33} & & & & & & & \\ & \cdot & & & & & & \\ C_{nn} & & & & & & & \end{array} \quad (2.16)$$

ただし、

$$\begin{aligned}C_{22} &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix}}{a_1} \\ C_{23} &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & a_4 \\ a_1 & a_5 \end{vmatrix}}{a_1} \\ &\cdot \\ C_{33} &= \frac{\begin{vmatrix} C_{11} & C_{13} \\ C_{22} & C_{23} \end{vmatrix}}{C_{22}} \\ C_{34} &= \frac{\begin{vmatrix} C_{11} & C_{13} \\ C_{22} & C_{24} \end{vmatrix}}{C_{22}} \\ C_{(i)(j)} &= \frac{\begin{vmatrix} C_{(i-2)(i-2)} & C_{(i-2)(j-1)} \\ C_{(i-1)(i-1)} & C_{(i-1)(j)} \end{vmatrix}}{C_{(i-1)(i-1)}}\end{aligned}$$

このとき、 $1, C_{11}, \dots$ をラウス列といい、システムが漸近安定であるための必要十分条件は C_{11}, C_{22}, \dots が全て正であることである。また、 C_{ii} のなかにゼロがなく、負のものがあればラウス列の符号の変化の回数に等しい不安定な極がある。

[例 1] $d(s) = s^3 + 6s^2 + 11s + 6$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 11 & 0 \\ 6 & 6 & 0 \\ 10 & 0 & \\ 6 & & \end{array}$$

[例 2] $d(s) = s^3 + s^2 + 2s + 3$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & \\ 1 & 3 & \\ -1 & 0 & \\ 3 & & \end{array}$$

よって2個の不安定な極が存在することになる。

(3) カリトノフの安定半別 [5]

前の2つの方法は基本的に等価であるが、例えば一つの変数が係数の中に含まれているような場合に、システムが安定であるような係数の範囲を求めることは可能である。ところが、変数の数が多くなったり、次数が大きくなる大きくなると不可能となる。これに対して、各係数がある区間の値をとる時、システムが安定であるかを簡単にチェックする方法がある。いま、各係数が次の区間の値をとるものとする。

$$a_i \in [\alpha_i, \beta_i] \quad (2.17)$$

このとき次の4つの多項式を定義する。

1. $f_1(s)$:

$$a_{n-2k} = \begin{cases} \beta_{n-2k}, & k \text{ が偶数のとき} \\ \alpha_{n-2k}, & k \text{ が奇数のとき} \end{cases} \quad (2.18)$$

$$a_{n-2k-1} = \begin{cases} \beta_{n-2k-1}, & k \text{ が偶数のとき} \\ \alpha_{n-2k-1}, & k \text{ が奇数のとき} \end{cases} \quad (2.19)$$

2. $f_2(s)$:

$$a_{n-2k} = \begin{cases} \alpha_{n-2k}, & k \text{ が偶数のとき} \\ \beta_{n-2k}, & k \text{ が奇数のとき} \end{cases} \quad (2.20)$$

$$a_{n-2k-1} = \begin{cases} \alpha_{n-2k-1}, & k \text{ が偶数のとき} \\ \beta_{n-2k-1}, & k \text{ が奇数のとき} \end{cases} \quad (2.21)$$

3. $f_3(s)$:

$$a_{n-2k} = \begin{cases} \alpha_{n-2k}, & k \text{ が偶数のとき} \\ \beta_{n-2k}, & k \text{ が奇数のとき} \end{cases} \quad (2.22)$$

$$a_{n-2k-1} = \begin{cases} \beta_{n-2k-1}, & k \text{ が偶数のとき} \\ \alpha_{n-2k-1}, & k \text{ が奇数のとき} \end{cases} \quad (2.23)$$

4. $f_4(s)$:

$$a_{n-2k} = \begin{cases} \beta_{n-2k}, & k \text{ が偶数のとき} \\ \alpha_{n-2k}, & k \text{ が奇数のとき} \end{cases} \quad (2.24)$$

$$a_{n-2k-1} = \begin{cases} \alpha_{n-2k-1}, & k \text{ が偶数のとき} \\ \beta_{n-2k-1}, & k \text{ が奇数のとき} \end{cases} \quad (2.25)$$

このとき、システムが安定であるための必要十分条件は上記の4つの多項式が全てフルビッツ多項式であることである。
(全ての多項式の根が安定)

[例] $d(s) = s^3 + a_1s^2 + a_2s + a_3$

$$f_1 = s^3 + \alpha_1s^2 + \beta_2s + \beta_3$$

$$f_2 = s^3 + \beta_1s^2 + \alpha_2s + \alpha_3$$

$$f_3 = s^3 + \beta_1s^2 + \beta_2s + \alpha_3$$

$$f_4 = s^3 + \alpha_1s^2 + \alpha_2s + \beta_3$$

また、 $n = 4m + 3$ の場合には、

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & \beta_2 & \beta_3 & \alpha_4 & \dots \\ 1 & \beta_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \beta_4 & \dots \\ 1 & \beta_1 & \beta_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \dots \\ 1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \beta_3 & \beta_4 & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^n \\ s^{n-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

という配列になる。このように $n = 4m + k$ ($k = 0, 1, 2, 3$) によってパターンは変化するが、 $f_i(s)$, ($i = 1, \dots, 4$) は簡単に構成することが出来る。実際の安定半別には $f_i(s)$ のそれぞれに対してラウスフルビッツの判定法を用いれば具体的に根を計算することなくシステムの安定性を保証することができる。

(4) バイラスの安定半別法 [6]

いま、 $f(s)$ と $g(s)$ がそれぞれフルビッツ多項式であるとする。ただし、

$$f(s) = s^n + a_1s^{n-1} \dots + a_n \quad (2.27)$$

$$g(s) = s^n + b_1s^{n-1} \dots + b_n \quad (2.28)$$

このとき、

$$\lambda f(s) + (1 - \lambda)g(s), \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \quad (2.29)$$

で与えられ多項式がフルビッツであるための必要かつ十分条件は次の定理で与えられる。

[定理 2.3]

(2.29) で与えられる多項式がフルビッツであるための必要かつ十分条件は、 $H(f)H^{-1}(g)$ の実固有値が (もし存在すれば) 正であることである。ただし、 $H()$ はフルビッツ行列である。

[例]

$$f(s) = s^3 + 2s^2 + 3s + 4$$

$$g(s) = s^3 + s^2 + 2s + 1$$

これより、

$$H(f) = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}, H(g) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H(f)H^{-1}(g) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_4 = 4, \lambda_2 = 1 + j, \lambda_3 = 1 - j$$

従って、(2.29) はフルビッツ多項式となる。

2.1.2 周波数領域での安定性判別

一入力一出力の系が図 2.1.2 のように構成されているとする。このとき、閉ループ系の伝達関数 $G(s)$ は

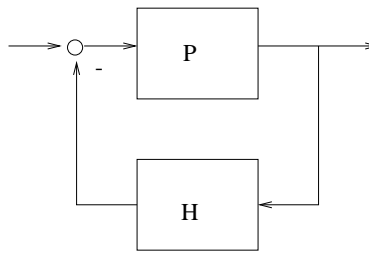


図 2.1: スカラ閉ループ系

$$G(s) = \frac{P(s)}{1 + L(s)}, L(s) = H(s)P(s) \quad (2.30)$$

となる。従って $1 + L(s)$ の零点の安定性を調べれば良いことがわかる。この不安定零点の数を $L(j\omega)$ をプロットすることにより調べる方法がナイキストの安定判別法である。具体的な判別法は、 $L(j\omega), (-\infty \leq \omega \leq \infty)$ を複素平面上にプロットする。このとき $L(j\omega)$ が $(-1, 0)$ を時計回りに回転する回数は

Z : 閉ループ系の不安定極の数

P : L の不安定極の数

とすると、 $R = Z - P$ となる。従って、閉ループ系が安定であるためには $R = -P$ すまじり $L(j\omega)$ は反時計回りにちょうど P 回回転しなければならない。このように閉ループ系の極を具体的に求めなくとも安定性を判定できるのがこの手法の特徴である。また、係数による安定判別法ではむだ時間を含む場合には応用は出来ないが、ナイキストの方法はそのまま用いることが出来る。元のシステムが安定である場合、 $P = 0$ であるから、 $R = 0$ となり $(-1, 0)$ の回りを回転しないことになる。[図 2.1.2 参照]

[例] 開ループ系が不安定極を一つ持ち、閉ループ系が安定であるような例。[図 2.1.2]

$$G(s)H(s) = \frac{K_1(T_2s + 1)}{s(T_2s - 1)} \quad (2.31)$$

ナイキストプロットを書くもう一つの利点は、その軌跡により系の安定度の目安がわかることである。いま、開ループ

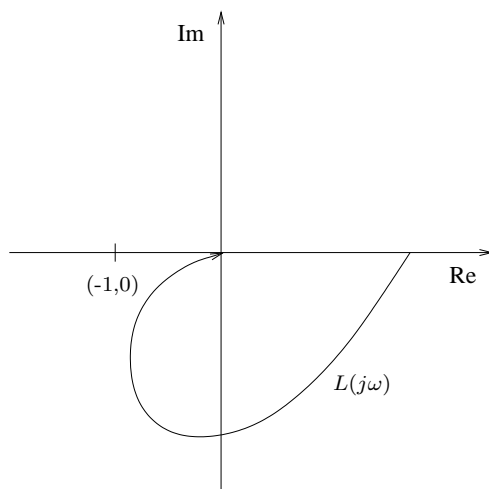


図 2.2: ナイキストの安定判別法

系の入力部分に不確定要素 Δ が入っているとしよう。簡単のために、 P 、 H が安定で開ループ系が閉ループ系が安定であるとする。このときの典型的なナイキストプロットは図 2.1.2 のようになる。このとき、 Δ を純粹むだ時間 e^{-sT} またはゲイン倍 g とした時に、システムが安定限界（虚軸上に極を持つ）になる T 、 g を位相余裕、ゲイン余裕という。この T 、 g はナイキストプロットを描くことにより簡単に求められる。 T は原点を中心として半径 1 の円を描いたとき、ナイキストプロットとその円が交差した点を P としたとき、 PO と実軸がなす角度を時計回りに計った角度である。一方、 g はナイキストプロットと実軸との交点を Q としたとき、 $-1/OQ$ で与えられる。これらの量は制御系のロバスト性を計る尺度として良く用いられる。特に、最適制御系や H_∞ 最適制御系のロバスト性を特徴付けるのに用いられる。詳しい議論は最適制御のところでも述べる。

2.1.3 リヤプノフの安定判別法

前節まででは、時不変線形システムの安定性を判別する方法について述べてきた。本節では広いクラスのシステムの安定判別に広く用いられているリヤプノフの判別法について述べる。リヤプノフの安定判別法は、物理システムのエネルギーの概念の拡張であるリヤプノフ関数を用いて安定性を判別するもので、その意味は直観的に理解しやすい。（以後の議論は有限次元のシステムに限定する。）

[定理 2.4](リヤプノフ) 次のシステムを考える。

$$\dot{x} = f(x, t), \quad f(0, t) = 0 \quad \text{for all } t \quad (2.32)$$

スカラ関数 $V(x, t)$ が x 、 t に関して連続微分可能で、 $V(0, t) = 0$ を満たし、さらに

1. $V(x, t)$ が正で、 $\alpha(0) = 0$ なる連続な非減少関数 $\alpha(\cdot)$ が存在して次式を満たす。

$$0 < \alpha(\|x\|) \leq V(x, t), \quad \text{for } x \neq 0 \quad (2.33)$$

2. $\gamma(0) = 0$ なる連続な関数 $\gamma(\cdot)$ が存在して、 \dot{V} が次式を満たす。

$$\dot{V}(x, t) \leq -\gamma(\|x\|) < 0, \quad \text{for } x \neq 0 \quad (2.34)$$

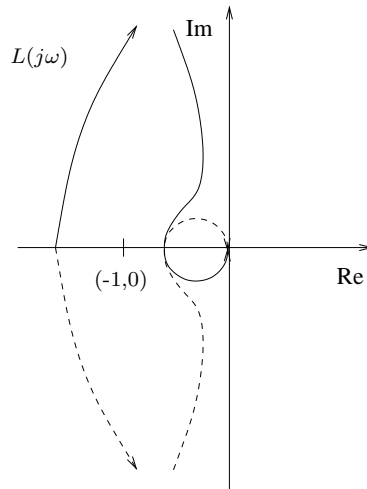


図 2.3: ナイキストの安定判別の例

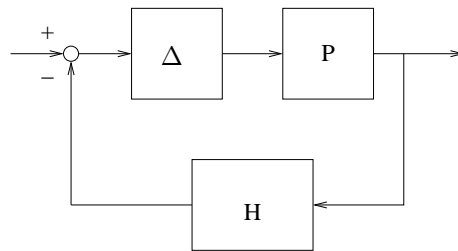


図 2.4: 不確定要素が入力部分に存在する閉ループ系

3. $\beta(0) = 0$ なる連続な非減少関数 $\beta(\cdot)$ が存在して、

$$V(x, t) \leq \beta(\|x\|) \tag{2.35}$$

4. $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \alpha(\|x\|) = \infty$

を満たす。このとき、平衡点 $x_e = 0$ は大域的一様漸近安定である。(この $V(\cdot)$ が存在することは実は必要条件でもあることが知られている。)

[系]

自由系

$$\dot{x} = f(x), \quad f(0) = 0 \tag{2.36}$$

に対して、次の3条件を満たすリアプノフ関数が存在するとき、 $x_e = 0$ は大域的に漸近安定である。

1. $V(x) > 0$ for $x \neq 0$
2. $\dot{V}(x) < 0$ for $x \neq 0$
3. $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} V(x) = \infty, V(0) = 0$

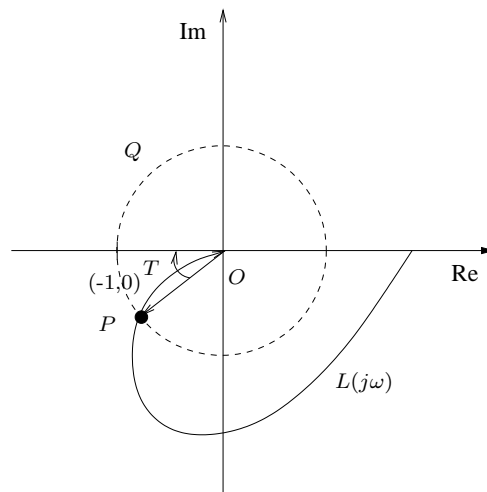


図 2.5: 開ループ安定な典型的なナイキストプロット

[定理 2.5](ラサール)

(2.36) に対して、 $V(x)$ が系の条件 (2) に等号を許し、その他の条件を満たすとする。 $\dot{V}()$ が原点以外のどんな解軌道に対しても恒等的にゼロにならなければ、原点は大域的に漸近安定である。

リヤプノフの判定法を用いる場合、問題となるのは $V()$ をどのように構成するかである。ところがラサールによる拡張では V に関する条件が弱められており、リヤプノフのオリジナルな判定法よりも構成しやすい。例をあげる。次の Lienard の方程式を考える。

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0 \quad (2.37)$$

1. $G(x) := \int_0^x g(\xi)d\xi > 0$ for $x \neq 0$
2. $G(x) \rightarrow \infty$ as $|x| \rightarrow \infty$
3. $f(x) > 0$ for $x \neq 0$

いま V を系の全エネルギーとして。

$$V(x, y) := \frac{1}{2}y^2 + G(x), \text{ ただし } y := \dot{x} \quad (2.38)$$

とする。これより、

$$\dot{V} = y\dot{y} + g(x)\dot{x} \quad (2.39)$$

$$= y(-g(x) - f(x)y) + g(x)y = -f(x)y^2 \quad (2.40)$$

従って、 $x=0$ 又は $y=0$ に対して $\dot{V}=0$ となる。ところが、原点を除いて $x=0$ または $y=0$ に留まる解葉存在しないのでシステムは大域的漸近安定である。

2.1.4 小ゲイン定理

前述のリヤプノフの安定判定法では、広いクラスのシステムの安定性を判別することが出来るが、ナイキストの判別法のように閉ループシステムの特徴から閉ループ系の安定性を判別することは出来ない。これに対して、ナイキストの

判別法のように開ループ系の特性から閉ループ系のシステムの安定性を判別する手法を与えるのが小ゲイン定理である。この手法はナイキストの手法と異なり、対象のシステムが非線形であったり、時変システムであっても適用することが出来る。

[定義 2.1] x_t

T を R の区間とし、 V を適当な多次元空間とする。 x を T から V への写像とする。このとき、 x_t を次式で定義する。

$$x_t(\tau) = \begin{cases} x(\tau) & \tau < t \\ 0 & \tau \geq t \end{cases} \quad (2.41)$$

[定義 2.2] X

X を $x: T \rightarrow V$ の関数からなる空間とし、次の3条件を満たすものとする。

1. X はノルム線形空間とし、 $x \in X$ のときそのノルムを $\|x\|$ で表す。
2. もし $x \in X$ であれば、 $x_t \in X$ が全ての t について成り立つ。
3. もし $x: T \rightarrow V$ で、 $x_t \in X$ であるときつぎの条件が成り立つ。
 - (a) $\|x_t\|$ は t に対して非減少関数である。
 - (b) もし $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_t\|$ が存在すれば $x \in X$ があり $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_t\| = \|x\|$ が成り立つ。

[定義 2.3] X_e

X の拡張空間を X_e で表し、次の関数よりなる集合である。

$$X_e = \{x | x: T \rightarrow V \text{ and } x_t \in X \text{ for all } t \in T\} \quad (2.42)$$

さらに、 X_e でのノルムは $x \in X$ であるとき、 $\|x\|_e = \|x\|$ とし、 $x \notin X$ であるとき $\|x\|_e = \infty$ で定義する。

[定義 2.4] H

$X_e \times X_e$ の部分集合を X_e での関係という。もし、 (x, y) が H の要素であるとき、 y は x に対して H の関係があるという。さらに H が X_e の関係であるとき、 H の定義域 $Do(H)$ 、 H の値域 $Ra(H)$ を次のように定義する。

$$\begin{aligned} Do(H) &= \{x | x \in X_e \text{ かつ } (x, y) \in H \text{ となる } y \in X_e \text{ が存在する}\} \\ Ra(H) &= \{y | y \in X_e \text{ かつ } (x, y) \in H \text{ となる } x \in X_e \text{ が存在する}\} \end{aligned}$$

[定義 2.5] g, \tilde{g}

関係 H のゲイン g を次式で定義する。

$$g(H) := \sup \frac{\|Hx_t\|}{\|x_t\|} \quad (2.43)$$

また、関係 H の増分ゲイン \tilde{g} を次式で定義する。

$$\tilde{g}(H) := \sup \frac{\|Hx_t - Hy_t\|}{\|x_t - y_t\|} \quad (2.44)$$

ただし、 \sup は $Do(H)$ の全ての x と $t \in T$ に対してとる。

いま次のような2つの関係 H_1, H_2 から構成される閉ループ系を考える。ここで、入力 x と出力 y の挙動を考えて、入出力安定性を次のように定義する。

[定義 2.6] 入出力安定

関係 H が次の2つの条件を満たす時、 H は入出力安定であるという。

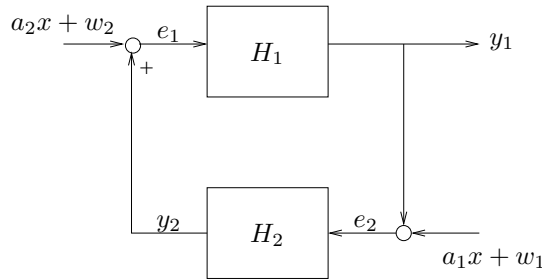


図 2.6: 2つの関係から構成される閉ループ系

1. H が有界。つまり、 $x \in X, \|x\|_e < \infty$ に対して $y = Hx$ が $\|y\|_e < \infty$
2. H が連続。つまり、全ての $x \in X, \|x\|_e$ に対してどんな $\epsilon > 0$ に対してある $\delta(\epsilon) > 0$ が存在して、もし $\|x - y\| < \delta(\epsilon)$ であれば $\|Hx - Hy\| < \epsilon$ となる。

このとき、図の閉ループ系が入出力安定であるための十分条件は次の定理で与えられる。

[定理 2.6]

E_1 を (x, e_1) 、 E_2 を (x, e_2) の関係とする。このとき、

- a) もし $g(H_1)g(H_2) < 1$ であれば E_1, E_2 は有界である。
- b) もし $\tilde{g}(H_1)\tilde{g}(H_2) < 1$ であれば E_1, E_2 は入出力安定である。

(注) H_1, H_2 が線形であれば a)、b) は一致する。

次に例として、 H_1, H_2 が時不変線形システムである場合を考えよう。ただし、 H_1, H_2 は共に安定であると仮定する。いま X として L_{2e} を考える。これより、

$$\sup_{x \in X} \frac{\|H_1 H_2 x\|}{\|x\|} = \|H_1 H_2\|_\infty < 1 \tag{2.45}$$

ただし、

$$\|H\|_\infty := \sup_{\omega \in R} \bar{\sigma}(H(j\omega)) \text{ で } \bar{\sigma}(\cdot) \text{ は最大特異値} \tag{2.46}$$

が十分条件として与えられる。 $H_1 H_2$ はナイキストの一巡伝達関数に相当するから、この条件はスカラ系の場合、ナイキストプロットが原点を中心とする半径 1 の円の中に存在することに等しい。このシステムの場合、ナイキストの安定判別法によれば、 $H_1 H_2$ のナイキストプロットが $(-1, 0)$ を一回も回転しなければ良いということであるから、非常に保守的であることがわかる。

2.2 感度関数・相補感度関数

図 2.2 の閉ループ系を考える。このシステムは z を r に追従させるような制御系の典型的なものである。外乱 w から z までの伝達関数を計算すると、

$$Z(s) = S(s)W(s), \quad S(s) = \frac{1}{1 + L(s)}, \quad L(s) = P(s)K(s) \tag{2.47}$$

となる。この $S(\cdot)$ を感度関数とよぶ。また、 S は r から e への伝達関数にもなっている。従って、追従特性を良くさせるためには S を出来るだけ小さくした方が良いことがわかる。また、感度関数には次のような意味もある。上記の閉ループ系の伝達関数 $H(s)$ は、

$$H(s) = \frac{KP}{1 + KP} \tag{2.48}$$

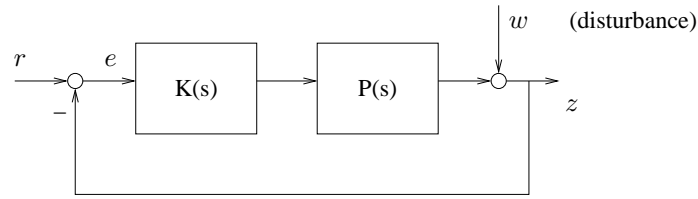


図 2.7: 目標値追従系

従って、信号としては次の開ループ系システムと等価である。いま P がパラメータ μ によって $P(\mu)$ と変化するとしよ

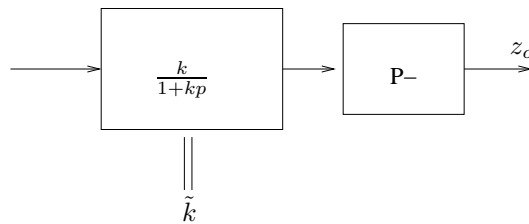


図 2.8: 閉ループ系に等価な開ループ系

う。これより等価閉ループ系での出力と閉ループ系での出力はそれぞれ次式で与えられる。

$$z_o(s) = \frac{KP(\mu)}{1+KP} r \quad (2.49)$$

$$z = \frac{KP(\mu)}{1+KP(\mu)} r \quad (2.50)$$

これよりパラメータ変動に対する出力の変化をそれぞれの場合について計算すると、

$$\frac{\partial z_o}{\partial \mu} = \frac{K}{1+KP} \frac{\partial P}{\partial \mu} r \quad (2.51)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \mu} = \frac{K \frac{\partial P}{\partial \mu} (1+KP) - KP \frac{\partial P}{\partial \mu}}{(1+KP)^2} r \quad (2.52)$$

$$= \frac{1}{1+KP} \left(\frac{K \frac{\partial P}{\partial \mu}}{1+KP} \right) r = S \frac{\partial z_o}{\partial \mu} \quad (2.53)$$

つまり、開ループを閉ループ系にすると等価開ループ系に比べて感度が S 倍になることを示している。この意味からも S は小さい方が良いことがわかる。ところが実は S は任意に小さくすることは出来ない。 $P(s)$ が不安定なゼロ点を持っている場合、補償器でこのゼロ点を相殺してはならないので、 $S(z) = 1$ となる。ところが解析関数の最大値の原理より $S(j\omega) > 1$ となる点が必ず存在することになる。(最大値の原理とは、ある領域で解析的な関数は最大値をその周上でとるというものであった。)

さらに、閉ループ系のロバスト安定性のためにも S は大きくとれないことを示そう。いまプラントが乗法的な摂動を受けて $G \rightarrow G(1+\Delta)$ と表されたとしよう。これは次のようなブロック線図で表される。こブロック線図を等価変換して図 2.2 を得る。この系に対して前節の小ゲイン定理を適用するとその安定性のための十分条件は次のようになる。

$$\|\Delta T\|_\infty < 1, \quad T := \frac{L}{1+L} \quad (2.54)$$

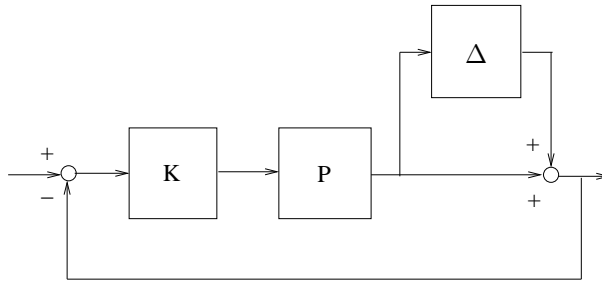


図 2.9: 摂動を受けた閉ループ系

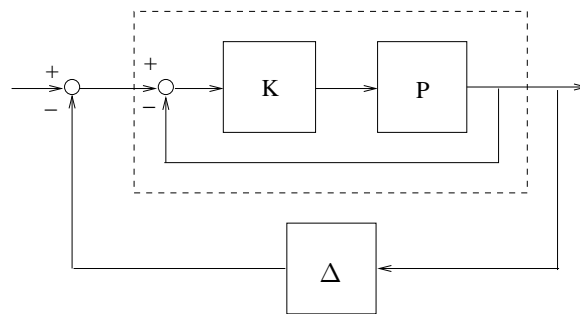


図 2.10: 等価変換された摂動を受けた閉ループ系

従って、変動に対してロバスト安定であるためには T が小さい方が良いことがわかる。とことが、

$$T + S = 1 \tag{2.55}$$

であるから、 T 、 S の両方を同時に小さくすることは出来ない。対象のプラントは一般に高周波域で不確定性が高く、 T は小さくしなければならない。一方、追従系は低周波域での追従特性が重視されるので S は小さくしなければならない。このように S と T を周波数領域でうまくバランスさせる問題を混合感度問題という。

2.3 可制御・可観測性

システムの動特性を表す制御理論的に最も基本的でかつ重要な概念が可制御性と可観測性である。この性質を直観的な形で述べると、可制御とはシステムの挙動を制御入力によって望ましいものにすることが出来ることであり、可観測性とは入手できる信号 (入力と出力) から内部のシステムの挙動を推定できることである。特に、システムが時不変システムであるとき、これらの性質はシステムの極や零点と深いかわりを持つ。ここではこれらの性質を時間領域と周波数領域で特徴付ける。

2.3.1 システムの極

システム (1.34) を考える。システムの極はシステムの安定性の解析のところで出てきたように、特性方程式 $\det(sI - A) = 0$ の根として定義される。ここで注意しなければならないのは根の重複度である。固有値 λ が $\det(sI - A) = 0$ の m 重根であるとき、 λ を代数的重複度が m であるという。また、固有値 λ に対する固有ベクトルで一次独立なもの最大個数

が α であるとき、 α を幾何学的重複度が α であるという。つまり、 α は λ を固有値とするジョルダンブロックの個数である。また、 λ を固有値としてもつジョルダンブロックの次数を $n_i, (i = 1, \dots, \alpha)$ とするとき、 λ に対する α 本の独立な固有ベクトル $w_i, (i = 1, \dots, \alpha)$ を選んで、 w_i から次のように独立なベクトル (一般化固有ベクトル) を作ることが出来る。

$$w_{j1} = w_j \quad (2.56)$$

$$(A - \lambda I)w_{jk+1} = w_{jk}, \quad k = 1, \dots, n_j - 1 \quad (2.57)$$

一般的にいつて、一つのジョルダンブロックは全体として一つの複雑な固有運動に対応し、異なるジョルダンブロックの固有運動は独立に扱うことが出来る。

[定義 2.7] システム極

λ が A の固有値であるとき、 λ はシステムのシステム極であるといひ、固有値としての重複度 $m; \alpha; n_1, \dots, n_\alpha$ を極の重複度という。 ($n_1 \leq \dots \leq n_\alpha$)

[例] λ_1 に対して $m = 4, \alpha = 3$ の重複度を持つシステムの例

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \lambda_1 & & & & \\ & & \lambda_1 & 1 & & \\ & & & \lambda_1 & & \\ & & & & \lambda_2 & \end{bmatrix}$$

2.3.2 可制御・可観測性とシステムの極

まず一般のシステムに対する可制御性について定義する。 [1][10]

[定義 2.8] 可制御性

システム (1.34) において、初期状態 $x(0) = x_0$ をある有限時間 t_1 の間に原点 $x(t_1) = 0$ とするような $u_{[0,t_1]}$ が存在する時、 x_0 は可制御であるという。また、全ての状態 x_0 が可制御であるとき、システムは完全可制御であるという。

システムが完全可制御であるための条件はつぎの定理で与えられる。

[定理 2.7]

システムが完全可制御であるための必要かつ十分条件は以下のいずれかが成り立つことである。

1. $W(0, t_1) := \int_0^{t_1} e^{-At} B B^T e^{-A^T t} dt$ が正則である。(この $W(0, t_1)$ を可制御グラミアンという)
2. 可制御行列を $V := [B, AB, \dots, A^{n-1}B]$ とするとき、 $\text{rank } V = n$ である。
3. λ を A の任意の固有値とするととき、 $\text{rank}[\lambda I - A, B] = n$ である。

可制御性の双対な概念として重要であるのが、可観測性である。

[定義 2.9] 可観測性

システム (1.34) において、有限時間 t_1 までの出力データ $y_{[0,t_1]}$ を観測することにより初期状態 x_0 を一意に決定できる時、 x_0 は可観測であるという。全ての x_0 が可観測であるときシステムは完全可観測であるという。

システムが完全可観測であるための条件は、可制御性の条件と同様に次の定理で与えられる。

[定理 2.8]

システムが完全可観測であるための必要かつ十分条件は以下のいずれかが成り立つことである。

1. $M(0, t_1) := \int_0^{t_1} e^{A^T t} C^T C e^{At} dt$ が正則。($M(0, t_1)$ を可観測グラミアンという。)

2. 可観測行列を $N := [C^T, A^T C^T, \dots, (A^T)^{n-1} C^T]$ とするとき $\text{rank } N = n$ である。

3. λ を A の固有値とすとき、 $\text{rank } [\lambda I - A^T, C^T] = n$

(3) の意味を物理的に考察する。 λ がシステムの極であれば $x_0 = w_\lambda$ という初期値に対して $x(t) = x_0 e^{\lambda t}$ という固有運動をもつ。ところが (3) の条件が満たされない λ に対しては $y(t) = Cx(t) = Cx_0 e^{\lambda t} = 0$ となり、この固有運動に対する出力は外部に出てこないことになる。このような極を不可観測な極という。また、 λ がシステムの極で v がそれに対する左固有ベクトルであれば任意の初期状態に対する v 方向への投影は $e^{\lambda t}$ に比例する。ところが、 $v^* B = 0$ に対する v が存在すれば、

$$v^* x(t) = v^* \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau = \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} v^* B u(\tau) d\tau = 0 \quad (2.58)$$

となり、 $e^{\lambda t}$ の固有運動は外部の入力により生成できないことがわかる。このような極を不可制御な極という。

システムを設計する場合、対象のシステムが必ずしも完全可制御・完全可観測とならない場合がある。例えば、プラントを安定な線形モデルの応答に追従させるような場合、プラントとモデルを一緒にした拡大系を作って制御系を設計することが良くある。当然、モデルの状態はプラントの入力からは不可制御であるので、拡大系は完全可制御とはならない。実際の設計では、このような不可制御・不可観測な状態をもつシステムを扱う必要が良くある。このようなシステムを統一的に扱うためには、可安定性・可検出性の概念が必要である。

[定義 2.10] 可安定性

不安定な極が全て可制御である時、システムは可安定である。つまり、

$$\text{rank } [\lambda I - A, B] = n \text{ for } \lambda \in C^+ \quad (2.59)$$

[定義 2.11] 可検出性

不安定な極が全て可観測である時、システムは可検出である。つまり、

$$\text{rank } [\lambda I - A^T, C^T] = n \text{ for } \lambda \in C^+ \quad (2.60)$$

これらの性質は、システムの安定化を考える際には最低限必要な条件である。

可制御・可観測性の定義においてグラミアンが定義され、システムの定性的な性質を決定するのに用いられた。これらの行列はシステムの性質を定量的にも表している。初期状態 x_0 に対する状態 $x(t)$ をちょうど時刻 $t = t_1$ でゼロにする入力は次式で与えられた。

$$u(t) = -B^T e^{-A^T t} W^{-1}(0, t_1) x_0$$

いま、対象の制御のしやすさの指標として $\|u\|^2 = \int_0^{t_1} u^T u dt$ を考える。この評価関数を実際に計算すると、

$$\int_0^{t_1} u^T(t) u(t) dt = x_0^T W^{-1}(0, t_1) \int_0^{t_1} e^{-At} B B^T e^{-A^T t} dt W^{-1}(0, t_1) x_0 \quad (2.61)$$

$$= x_0^T W^{-1}(0, t_1) x_0 \quad (2.62)$$

従って、

$$\frac{\|u\|^2}{\|x_0\|^2} = \frac{x_0^T W^{-1}(0, t_1) x_0}{\|x_0\|^2} \leq \bar{\sigma}^2(W^{-1}(0, t_1)) \quad (2.63)$$

従って、 $\bar{\sigma}^2(W^{-1}(0, t_1))$ を小さくできれば、どのような初期状態に対しても少ないエネルギーで制御できることがわかる。もし、 A が反安定であるなら (全ての固有値の実部が全て正)、 $W := W(0, \infty)$ は次のリヤプノフ方程式の解としてユニークに求めることができる。[12]

$$AW + WA^T = BB^T \quad (2.64)$$

また、同様にして可観測グラミアン M は

$$A^T M + M A = C^T C \quad (2.65)$$

により求めることができる。しかし、 $t < \infty$ である場合には $\sigma(\cdot)$ はシステムのパラメータだけでは決定されないため、それぞれの t_1 に対して数値的に求めなければならない。

2.4 システムの零点

前節では、システムの極と可制御性・可観測性について述べた。そこではシステムの極がシステムの安定性以外にもシステムの挙動に大きく影響を与えることがわかった。次にシステムの挙動を考える上で非常に重要である零点について述べる。システムの零点はロバスト安定性、外乱局所化、サーボ問題で重要な役割を果たす。しかし、システムの極に比べて定義が複雑であり、種類が多いので、その意味を十分に理解されていないように思われる。本節では多入出力系の零点について詳しく述べる。

2.4.1 一入力一出力システムの零点

一入力一出力系において良く知られているように、伝達関数を

$$G(s) = \frac{n(s)}{d(s)} \quad (2.66)$$

とすれば、 $n(s)$ 、 $d(s)$ が既約であれば、極・零点はそれぞれ $d(s) = 0$ 、 $n(s) = 0$ の根で与えられた。いま、 $n(s) = 0$ の根として $s = \lambda$ があつたとする。このシステムに $u(t) = e^{\lambda t}$ を入力すると

$$y(s) = \frac{n(s)}{d(s)} \frac{1}{s - \lambda} = \frac{(s - \lambda)\tilde{n}}{(s - \lambda)d(s)} = \frac{\tilde{n}}{d(s)} \quad (2.67)$$

となり、 $e^{\lambda t}$ の成分は出力に出てこない。つまり、零点は入力の阻止作用を表していると考えられる。このような零点が多入出力系でどのように定義されるかを次節で詳しく述べる。

2.4.2 多入出力系の零点

システム (A, B, C, D) を考える。この行列を用いてシステム行列 $P(s)$ を次のように定義する。

$$P(s) = \begin{bmatrix} A - sI & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

この $P(s)$ に関連して次の補題が成立する。

[補題]

システム (A, B, C, D) において、初期状態 x_0 と入力 $u(t) = u_0 e^{\lambda t}$ に対して、状態が $x(t) = x_0 e^{\lambda t}$ であり出力が $y(t) \equiv 0$ となるための必要かつ十分条件は次式が成立することである。

$$\begin{bmatrix} A - \lambda I & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ u_0 \end{bmatrix} = 0 \quad (2.69)$$

可制御・可観測性の条件で、 λ を A の固有値とすると、

$$\begin{cases} (A - \lambda I)w = 0 \\ Cw = 0 \end{cases} \quad (2.70)$$

または、

$$\begin{cases} v^*(A - \lambda I) = 0 \\ v^*B = 0 \end{cases} \quad (2.71)$$

が成立するような w, v が存在する時、その λ はそれぞれ不可制御な極、不可観測な極といわれた。このことを言い替えると、 $(A - sI)$ と C の右共通因子の特性根は不可観測な極であり、 $(A - sI)$ と B の左共通因子の特性根は不可制御な極である。ただし、ここでいう特性根とは、多項式行列 $M(s)$ が存在する時、 $M(s)$ の単因子の特性根である。ただし、 $M(s)$ の単因子とは、 $M(s)$ をスミス正準系に変形した時のゼロでない対角要素である。

[例]

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad C = [1, 1] \quad (2.72)$$

この C と $A - sI$ の共通右因子は次式で与えられる。

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 + s \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

実際、

$$\begin{aligned} [1, 1] &= [1, 0] \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 + s \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -s & 1 \\ -1 & -2 - s \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -s & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 + s \end{bmatrix} \end{aligned}$$

いま、 $(A - sI)$ と C の最大共通右因子を $A_{\bar{o}}(s)$ 、 $(A - sI)$ と B の最大共通左因子を $A_{\bar{c}}(s)$ とし、

$$A - sI = A_o(s)A_{\bar{o}}(s) = A_{\bar{c}}(s)A_c(s) \quad (2.74)$$

と分解する。次に A_o と C の最大共通右因子を $A_{c\bar{o}}(s)$ 、 $A_o(s)$ と B の最大共通左因子を $A_{o\bar{c}}(s)$ とし、次のように分解する。

$$A_c(s) = A_{co}(s)A_{c\bar{o}}(s) \quad (2.75)$$

$$A_o(s) = A_{o\bar{c}}(s)A_{oc}(s) \quad (2.76)$$

これより

$$A - sI = A_{o\bar{c}}(s)A_{oc}(s)A_{\bar{o}\bar{c}}(s)A_{\bar{c}c}(s) \quad (2.77)$$

$$= A_{\bar{c}o}(s)A_{\bar{o}\bar{c}}(s)A_{co}(s)A_{c\bar{o}}(s) \quad (2.78)$$

と分解される。これらの関係を用いてシステム行列を分解すると、

$$\begin{aligned} P(s) &= \begin{bmatrix} A_{\bar{c}} & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{co}(s) & B_c(s) \\ C_o(s) & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{c\bar{o}}(s) & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_{o\bar{c}} & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{oc}(s) & \tilde{B}_c(s) \\ \tilde{C}_o(s) & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{\bar{o}}(s) & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.79)$$

ただし、

$$B = A_{\bar{c}}(s)B_c(s) = A_{o\bar{c}}(s)\tilde{B}_c(s) \quad (2.80)$$

$$C = C_o(s)A_{c\bar{o}}(s) = \tilde{C}_o(s)A_{\bar{o}}(s) \quad (2.81)$$

また、

$$P_{co} = \begin{bmatrix} A_{co}(s) & B_c(s) \\ C_o(s) & D \end{bmatrix} \quad (2.82)$$

$$P_{oc} = \begin{bmatrix} A_{oc}(s) & \tilde{B}_c(s) \\ \tilde{C}_o(s) & D \end{bmatrix} \quad (2.83)$$

と定義する。これらの定義を用いて3種類の零点が定義される。

[定義 2.12] 伝達零点

(2.79) の分解形において、 P_{co} の特性根を重複度も含めて伝達零点という。

[定義 2.13] 不変零点

システムマトリックス $P(s)$ の特性根を重複度も含めてシステムの不変零点という。

[定義 2.14] システム零点

$P(s)$ のランクを ρ とする。 P_{co} の ρ 次行列式因子を $D_T(s)$ とし、

$$D_s(s) = \det A_{\bar{c}}(s)D_T(s)\det A_{c\bar{o}}(s) \quad (2.84)$$

とする。このとき、 λ が $D_s(s) = 0$ の m 重根であるとき、 λ は代数的重複度 m のシステム零点という。(これは、 λ が (2.79) の分解されたマトリックスの少なくともどれか1つの特性根であることを意味している。)

上記の零点の性質を証明なしで次の命題に示す。[10]

[命題] 伝達零点の性質

システム (A, B, C, D) の伝達極・伝達零は伝達関数 $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ のスミス・マクミラン正準系の分母多項式・分子多項式の根にそれぞれ重複度も含めて一致する。また、伝達関数の任意の既約分解 $G(s) = N_R(s)D_R^{-1}(s) = D_L^{-1}(s)N_L(s)$ における分母マトリックス $D_R, D_L(s), N_R(s), N_L(s)$ の特性根にそれぞれ重複度も含めて一致する。ただし、伝達極とは可制御かつ可観測な極のとである。

[命題] 不変零点の性質

元のシステムに対して

$$\hat{x} = Tx, P\hat{u} = u, \hat{y} = Qy \quad (2.85)$$

また状態フィードバック $u = Fx$ 、出力の直接挿入を行なったシステム (図 2.4.2 参照)

$$\begin{aligned} \hat{A} &= T(A + BF + GC + GEF)T^{-1} \\ \hat{B} &= T(B + GE)P \\ \hat{C} &= Q(C + EF)T^{-1} \\ \hat{D} &= QDP \end{aligned} \quad (2.86)$$

の不変零点は元のシステムのもものと完全に一致する。

[命題] システム零点の性質

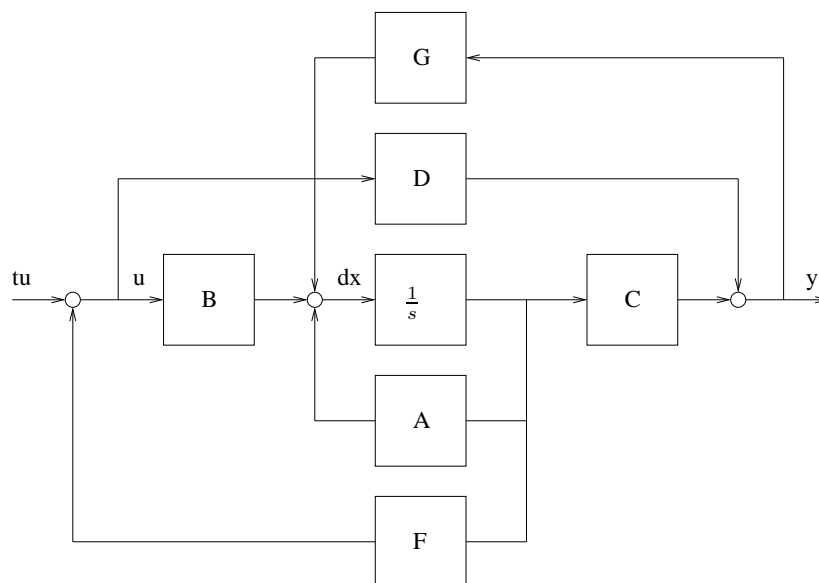


図 2.11: 状態フィードバックと入力直接挿入

μ を伝達関数 $G(s)$ のランクとする。 B の j_1, \dots, j_μ の列のみを残して得られる行列を B^j とする。また、 C の i_1, \dots, i_μ の行を残した行列を C^i 、 D の i_1, \dots, i_μ 行、 j_1, \dots, j_μ 列を残してえられる行列を D^{ij} とする。こうして得られるシステムマトリックスを

$$P^{ij} = \begin{bmatrix} A - sI & B^j \\ C^i & D^{ij} \end{bmatrix} \tag{2.87}$$

とし、 P^{ij} の行列式を $d^{ij}(s)$ とする。このとき $1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_\mu \leq p$ 、 $1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_\mu \leq m$ なる全ての i, j についての d^{ij} の最大公約多項式 (の 1 つ) は $D_s(s)$ である。

[命題] 各零点間の関係

零点の代数的重複度だけを考えた場合、

$$\text{伝達零} \subset \text{不変零点} \subset \text{システム零点} \tag{2.88}$$

となる。

2章の定理の証明

[定理 2.1 の証明] 今、特性を重複も含めて、 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ とする。もし、 λ_i が単根であれば、 λ_i に対する固有ベクトル v_i を複期状態とする次のような解が存在する。

$$\phi(t, v_i, 0) = e^{\lambda_i t} v_i \quad (2.89)$$

また、 λ_i が p 重根である場合には、

$$\phi(t, v_i, 0) = \sum_{k=0}^{p-1} (\lambda_i - A)^k t^k e^{\lambda_i t} v_i \quad (2.90)$$

ただし $v_i \in \text{Ker}(\lambda_i - A)^p$ 。ここで $\text{Ker}(A)$ とは $x|Ax = 0$ なる集合のことである。従って、 $\text{Re}(\lambda_i) \geq 0$ であるとする $\|\phi(t, v_i, 0)\| \geq c$ となり、漸近安定とはならない。従って、特性方程式で実部が負であることは必要条件であることが分かる。

次に、特性方程式の根のうち $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ を実部が負でないものとし、 $\lambda_{l+1}, \dots, \lambda_n$ を実部が負であるそれぞれ s_1, \dots, s_n 重根であるとする。ここで、 $\varphi^+(s)$ 、 $\varphi^-(s)$ を次のように定義する。

$$\varphi^+(s) = \prod_{i=1}^l (s - \lambda_i)^{s_i} \quad (2.91)$$

$$\varphi^-(s) = \prod_{i=l+1}^n (s - \lambda_i)^{s_i} \quad (2.92)$$

当然、 $\det(sI - A) = \varphi^+(s)\varphi^-(s)$ である。 $\varphi^+(s)$ 、 $\varphi^-(s)$ は明らかに共通因子を含まないので、

$$h_1(s)\varphi^+(s) + h_2(s)\varphi^-(s) = 1 \quad (2.93)$$

とする $h_1(s)$ 、 $h_2(s)$ が存在する。[2] これより、 s を A に替えた行列の等式を得る。

$$h_1(A)\varphi^+(A)x + h_2(A)\varphi^-(A)x = x \quad (2.94)$$

ケーリー ハミルトンの定理より $\varphi^+(A)\varphi^-(A) = 0$ であるので、もし

$$x \in \text{Im } h_1(A)\varphi^+(A) \text{ つまり、} x = h_1(A)\varphi^+(A)y \quad (2.95)$$

と表現できれば

$$\varphi^-(A)x = \varphi^-(A)h_1(A)\varphi^+(A)y = h_1(A)\varphi^+(A)\varphi^-(A) = 0 \quad (2.96)$$

となり、

$$\text{Im } h_1(A)\varphi^+(A) \subset \text{Ker } \varphi^-(A) \quad (2.97)$$

となる。一方 $x_0 \in \text{Ker } \varphi^-(A)$ とすると (2.94) より $c_0 = h_1(A)\varphi^+(A)x_0$ となり、 $\text{Ker } \varphi^-(A) \subset \text{Im } h_1(A)\varphi^+(A)$ となる。従って、 $\text{Ker } \varphi^-(A) = \text{Im } h_1(A)\varphi^+(A)$ となる。明らかに $\text{Ker } \varphi^+(A)$ と $\text{Ker } \varphi^-(A)$ は共通部分を持たないから (2.94) 式より

$$R^n = \mathcal{H}^+(A) \oplus \mathcal{H}^-(A) \quad (2.98)$$

と書ける。ただし、

$$\mathcal{H}^+(A) = \text{Ker } \varphi^+(A)$$

$$\mathcal{H}^-(A) = \text{Ker } \varphi^-(A)$$

である。もし、特性根で実部が非負のものがなければ $R^n = \mathcal{H}^-(A)$ となる。ところが $Ker(\lambda_i - A)^{s_i}$ はそれぞれ共通部分を含まないから

$$\mathcal{H}^-A = Ker(\lambda_{l+1} - A)^{s_{l+1}} \oplus Ker(\lambda_{l+2} - A)^{s_{l+2}} \oplus \dots \quad (2.99)$$

と書いて、すべての初期状態は上式の部分空間内の要素に分解されるので、その状態に対する解は (2.90) の形式の線形結合で表されることが分かる。従って、すべての初期状態に関する解は漸近安定となる。

[Q.E.D.]

[定理 2.2 の証明](必要) $\phi()$ の連続性より、有限の t_0 に対して、 $\|\Phi(t_0, 0)\|$ は有界となる。今、 $\|\Phi(t_0, 0)\| = k$ とする。

$$\|\Phi(t, 0)\| = \|\Phi(t, t_0)\Phi(t_0, 0)\| \leq \|\Phi(t, t_0)\| \|\Phi(t_0, 0)\| = k \|\Phi(t, t_0)\| \quad (2.100)$$

ところが、定義より

$$\|\Phi(t, t_0)\| := \sup \frac{\|\phi(x_0, t_0, 0, t)\|}{\|x_0\|} \quad (2.101)$$

であるから

$$\|\Phi(t, 0)\| \leq k \sup \frac{\|\phi(x_0, t_0, 0, t)\|}{\|x_0\|} \quad (2.102)$$

システムが漸近安定であると $\|\phi(x_0, t_0, 0, t)\| \rightarrow 0$ であるから $\|\Phi(t, 0)\| \rightarrow 0$

(十分) $\|\Phi(t, 0)\| \rightarrow 0$ であると仮定しよう。

$$\phi(x_0, t_0, 0, t) = \Phi(t, t_0)x_0 = \Phi(t, 0)\Phi(0, t_0)x_0 \quad (2.103)$$

これにより

$$\|\phi(x_0, t_0, 0, t)\| \leq \|\Phi(t, 0)\| \|\Phi(0, t_0)\| \|x_0\| \quad (2.104)$$

これにより、 t_0 が有界であるなら $\|\Phi(0, t_0)\|$ も有界となり、 $\|\Phi(t, 0)\| \rightarrow 0$ より $\|\phi(x_0, t_0, 0, t)\| \rightarrow 0$ となる。

[Q.E.D.]

[定理 2.7 の証明]

(1)(十分性)

$$u(t) = -B^T e^{-A^T t} W^{-1}(0, t_1) x_0 \quad (2.105)$$

とする。ここで、 x_0 は初期状態である。この入力 $u(t)$ に対する時刻 $t = t_1$ での状態は次式で与えられる。

$$x(t_1) = e^{-A t_1} x_0 - e^{A t_1} \int_0^{t_1} e^{-A \tau} B B^T e^{-A^T \tau} d\tau W^{-1}(0, t_1) x_0 = 0 \quad (2.106)$$

(十分性) 背理法による。完全可制御であるが、どのような t_1 に対しても $W(0, t_1)$ が正則でないとする。これより任意の $t_1 \geq 0$ に対してゼロでない n 次元ベクトル α が存在して、

$$\alpha^T W(0, t_1) \alpha = \int_0^{t_1} \alpha^T e^{-A \tau} B (\alpha^T e^{-A^T \tau} B)^T d\tau = 0 \quad (2.107)$$

となる。よって、任意の t に対して、

$$\alpha^T e^{-A \tau} B = 0^T, \quad t \geq 0 \quad (2.108)$$

ところが、システムは可制御であるから次式を満たす入力 $u()$ が存在する。

$$0 = e^{A t} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau \rightarrow -x_0 = \int_0^t e^{-A \tau} B u(\tau) d\tau \quad (2.109)$$

x_0 は任意であるから $x_0 = \alpha$ とすると

$$-\|\alpha\|^2 = \alpha^T \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau = 0 \quad (2.110)$$

となり、 $\alpha \neq 0$ の仮定に反する。

(2)(十分性) $\text{rank } V = n$ であるが、完全可制御でないとして矛盾を導く。(1) より、 $W(0, t_1)$ は正則でなく、

$$\alpha^T e^{-A\tau} B = 0^T, \quad t \geq 0, \alpha \neq 0$$

が成立する。上式を t で微分して、 $t = 0$ とすると

$$\alpha^T A^k B = 0^T, \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (2.111)$$

これより、

$$\alpha^T [B, AB, \dots, A^{n-1}] = \alpha^T V = 0 \quad (2.112)$$

となり、 $\alpha \neq 0$ に矛盾する。よって、 $\text{rank } V = n$ であれば完全可制御である。

(必要性) 完全可制御であるが、 $\text{rank } V < n$ であると仮定する。これより $\alpha^T V = 0$ を満たすゼロでない α が存在する。ところが、 e^{-At} はケーリー・ハミルトンの定理より $[I, A, \dots, A^{n-1}]$ の線形結合であるので、

$$\alpha^T e^{-At} B = 0, \quad t \geq 0, \alpha \neq 0 \quad (2.113)$$

従って、

$$\int_0^t \alpha^T e^{-At} B (\alpha^T e^{-At} B)^T d\tau = \alpha^T W(0, t_1) \alpha = 0 \quad (2.114)$$

となる。(1) より $W(0, t_1)$ は正則であるあるから $\alpha = 0$ となり仮定に反する。

(3) 次の補題を用いる。[11]

[補題]

次の2つの条件は互いに等価である。

1. ある i に対して、次の条件を同時に満たすゼロでないベクトルが存在しない。

$$v^*(\lambda_i I - A) = 0 \quad (2.115)$$

$$v^* B = 0 \quad (2.116)$$

2. B の全ての列ベクトルに直交する複素部分空間は A^* に対して不変となる部分空間を含まない。(部分空間 \mathcal{V} が A^* 不変とは、 $A^* \mathcal{V} \subset \mathcal{V}$ であることをいう)

補題の1の条件と(3)は等価であるので、補題の2ならば(2)であることを示す。 \mathcal{V} を A^* 不変な t 次元の部分空間であるとする。 \mathcal{V} が A^* 不変であるので、どんな $v \in \mathcal{V}$ に対しても、ある $k, (1 \leq k \leq t)$ が存在して $v, A^* v, \dots, A^{*(k-1)} v$ が線形独立で、 A^{*k} が線形独立でないものが存在する。つまり、

$$a_0 v + a_1 A^* v + \dots + A^{*k} v = 0 \quad (2.117)$$

いま μ を次式の多項式の根であるとする。

$$a_0 + a_1 \mu + \dots + \mu^k = 0 \quad (2.118)$$

次の方程式を考える。

$$\begin{aligned}
 \mu b_0 &= a_0 \\
 \mu b_1 - b_0 &= a_1 \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 \mu b_{k-1} - b_{k-2} &= a_{k-1} \\
 -b_{k-1} &= 1
 \end{aligned} \tag{2.119}$$

これより、 μ が決まれば b_0, \dots, b_{k-1} はユニークに決定される。逆に b_0, \dots, b_{k-1} が与えられれば、(2.119) は (2.118) が満たされるための条件となる。(2.119) 式の関係 (2.117) に代入すると

$$(\mu I - A^*)(b_0 + \dots + b_{k-1}A^{*(k-1)}v) = 0 \tag{2.120}$$

となる。 $b_0 + \dots + b_{k-1}A^{*(k-1)}v$ は仮定よりゼロベクトルではなく、 \mathcal{V} の要素であり A^* の固有ベクトルでもある。

いま v をゼロでないベクトルであるとしよう。このとき $v^*B \neq 0$ または $v^*B = 0$ である。もし、 $v^*B = 0$ であり補題の 2 が満たされているとすると、次の全てのベクトルが B の列ベクトルに直交する部分空間に存在することはない。

$$v, A^*v, \dots, A^{*(k-1)}v \tag{2.121}$$

なぜなら、 $A^{*k}v$ は (2.121) のベクトルに従属になり、(2.120) のように表され A^* 不変となる。これは補題 2 の条件に反する。従って、いずれの場合でも

$$v^* [B, AB, \dots, A^{k-1}B] \neq 0 \tag{2.122}$$

となり、 $k = n$ とすれば (2) が満たされる。

(必要性)(2) より (2.122) を満たす。もし B がランク n を持つなら明らかに補題の 2 を満たす。もしそうでなければ $v^*B = 0$ となる v^* を選ぶ。(2.122) より、

$$v^* [AB, \dots, A^{k-1}B] \neq 0 \tag{2.123}$$

となる。従って、 $A^*v, \dots, A^{*(k-1)}v$ のうち少なくとも一つはゼロでない。従ってそのような v は A^* 不変ではない。従って完全可制御であれば補題 2 を満たす。つまり (3) である。

[Q.E.D.]

[定理 2.8 の証明]

$t \rightarrow -t, A \rightarrow A^T, B \rightarrow C^T, C \rightarrow B^T, D \rightarrow D^T$ と置いたシステムを考え、可制御性と同様に証明することができる。このような置換えを行なったシステムを双対システムという。

第3章 制御系設計

前章までで、動的システムのモデリング及び解析の手法を一通り述べた。本章では具体的な制御系設計の手法について述べる。本章で取り上げる手法は、 H_∞ 制御が現れる以前に確立されたいわゆる現代制御理論に基づく方法である。対象となるシステムは前章までで詳しく解析してきた次の時不変線形システムである。

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}\tag{3.1}$$

前章でも述べたように、このシステムの挙動は極及び零点によって特徴付けられる。とくにシステムが漸近安定であるためには、 A の全ての固有値の実部が負でなければならなかった。もし、システムが不安定であるとき、どのような条件でシステムを制御入力によって安定化できるであろうか。可制御性のところで述べたように、任意の初期状態をゼロ状態にする入力が存在する時、システムは可制御であった。もし、システムが不安定であっても、状態がゼロ状態になればそれ以後の入力をゼロとすれば状態はその状態に理論的には留まることになり安定化できることになる。しかし、このような入力は時間の陽な関数であり、一般に実現するのは困難である。また、外乱が存在する場合には、ゼロ状態の近傍にシステムをとどめることはできない。ここではこのようなオープンループ制御ではなく、現在のシステムの量を使ってシステムを安定化するフィードバック制御について考える。

3.1 状態フィードバックによるシステムの安定化

いま理想的な状態を考え、システムの状態が全て利用可能 (観測できる) と仮定する。この時、制御入力を

$$u = Fx\tag{3.2}$$

とする状態フィードバックによって構成する。この入力に対して (3.1) は次のように書き表される。

$$\dot{x} = (A + BF)x\tag{3.3}$$

従って、システムが漸近安定であるためには $A + BF$ の全ての固有値の実部が負であればよいことがわかる。また、安定化以上にシステムの固有運動を制御するためには、 $A + BF$ の固有値を望ましいものとするように F を決定すればよいことになる。それでは、どのような条件の下でこのようなことが可能であろうか。この問題の対する解は次の定理で与えられる。[1][2]

[定理 3.1]

$\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ を n 個の対称な複素数の集合とする。つまり、 λ_i が複素数であればこれに共役なものがかならず Λ に含まれているとする。このとき、 $A + BF$ の固有値を Λ に一致できるための必要かつ十分条件はシステムが完全可制御であることである。

このように、時不変線形システムではその可制御性と極配置可能性の間には非常に興味深い関係がある。まず必要性を示す。もし、 (A, B) が可制御でなければある列ベクトル v と A の固有値 λ が存在して

$$\begin{aligned}v^*(\lambda I - A) &= 0 \\ v^*B &= 0\end{aligned}\tag{3.4}$$

を満たす。任意の F に対して

$$v^*(\lambda I - A) + v^*BF = v^*(\lambda - A - BF) = 0 \quad (3.5)$$

となり、 λ は $A + BF$ の固有値となり閉ループ系にもこの極が存在し、動かすことができないことがわかる。次に十分性をスカラ系の場合について示す。システムが一入力一出力系で次のシステム方程式で表されるとする。

$$\dot{x} = Ax + bu \quad (3.6)$$

$$y = c^T x \quad (3.7)$$

可制御行列 V を次式で定義し、

$$V = [b, Ab, \dots, A^{n-1}b] \quad (3.8)$$

l^T を V^{-1} の最下行の行ベクトルであるとする。つまり、

$$V = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ l^T \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

これより、

$$TA = \begin{bmatrix} l^T A \\ \cdot \\ \cdot \\ l^T A^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ -a_0 & -a_1 & \dots & & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l^T \\ \cdot \\ \cdot \\ l^T A^{n-1} \end{bmatrix} := \bar{A} \begin{bmatrix} l^T \\ \cdot \\ \cdot \\ l^T A^{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

なぜなら、ケリー・ハミルトンの定理より

$$l^T A^n = -a_0 l^T + -a_1 l^T A + \dots + -a_{n-1} l^T A^{n-1} \quad (3.11)$$

ここで、 \bar{A} の最下行は A の特性多項式の係数を負にしたものであることに注意する。また、

$$V^{-1}V = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ l^T \end{bmatrix} [b, Ab, \dots, A^{n-1}b] = \begin{bmatrix} * & * \\ \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

従って、

$$T^{-1}b = \begin{bmatrix} l^T b \\ \cdot \\ \cdot \\ l^T A^{n-1}b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix} : \bar{b} \quad (3.13)$$

従って、 $x = T\bar{x}$ とする座標変換を考えると、元のシステムは \bar{x} を用いて

$$\begin{aligned} T\dot{\bar{x}} &= AT\bar{x} + bu \\ \dot{\bar{x}} &= T^{-1}AT\bar{x} + T^{-1}bu \\ &= \bar{A}\bar{x} + \bar{b}u \end{aligned} \quad (3.14)$$

このシステム表現を (3.7) の可制御正準系という。いまこのシステムに対して $u = \bar{f}\bar{x}$ を考えると、

$$\dot{\bar{x}} = (\bar{A} + \bar{b}\bar{f})\bar{x} \quad (3.15)$$

となる。このシステムの特性方程式は

$$\begin{aligned} \det(sI - \bar{A} - \bar{b}\bar{f}) &= \det(T^{-1}T(sI - \bar{A} - \bar{b}\bar{f})T^{-1}T) \\ &= \det(T^{-1})\det(sI - A - bf)\det(T) \text{ ただし } f := \bar{f}T^{-1} \end{aligned}$$

従って、 (\bar{A}, \bar{b}) を用いて $\bar{A} + \bar{b}\bar{f}$ の固有値を望ましいところに配置できたなら、 $f = \bar{f}T^{-1}$ を元のシステムに対するフィードバックゲインとして用いれば良いことがわかる。ところが、 (\bar{A}, \bar{b}) より、望ましい閉ループ系の特性多項式を、

$$\psi(s) = s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_0 \quad (3.16)$$

とすると、 \bar{f} は簡単に求められて

$$\bar{f} = [-b_0 + a_0, \dots, -b_{n-1} + a_{n-1}] \quad (3.17)$$

となる。ここでは示さないが、完全可制御であれば多入出力系に対しても同様に変換を施すことにより、構成的にフィードバックゲイン F を求めることができる。[3]

上で述べた方法は、原理的には A またはそれと同等のベキ乗を計算しなければならず、 A の次数が大きい場合には計算誤差が大きくなり実用的でない。これに対して、閉ループ系の極と固有ベクトルを与えて極配置を実現する方法がある。[2] システムが可制御である時、線形独立な $\{f_1, \dots, f_n\}$ で

$$f_i = (\lambda_i I - A)^{-1} B g_i, \quad g_i \in R^m \quad (3.18)$$

を満足するものが存在する。このときフィードバックゲイン F を

$$F = [g_1, \dots, g_n] [f_1, \dots, f_n]^{-1} \quad (3.19)$$

とすると

$$\begin{aligned} (\lambda_i I - A - BF)f_i &= (\lambda_i I - A)f_i - BFf_i \\ &= Bg_i - Bg_i = 0 \end{aligned} \quad (3.20)$$

となり、 λ_i, f_i が $A + BF$ の固有値・固有ベクトルになっていることがわかる。もし、指定された極が A の固有値を含まず、しかも各々異なっていれば具体的なアルゴリズムは次のようになる。

1. 適当に $g_i \in R^m$ を選び $f_i = (\lambda_i I - A)^{-1} B g_i$ とする。
2. $F = [g_1, \dots, g_n] [f_1, \dots, f_n]^{-1}$ を求める。もし、1. で λ_i が実数でなければ

$$\begin{aligned} f_i &= \{(\sigma_i I - A)^2 + \mu_i^2 I\}^{-1} \{(\sigma_i I - A)B g_i + \mu_i B g_i\} \\ f_j &= \{(\sigma_i I - A)^2 + \mu_i^2 I\}^{-1} \{(\sigma_i I - A)B g_i - \mu_i B g_i\} \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$(3.22)$$

とすれば実数の計算だけですむ。ただし、 $\lambda_i = \sigma_i + j\mu_i$ である。

[例]

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

このシステムの極を状態フィードバックによって $\lambda = -1, -2$ にすることを考える。 $(g_1, g_2) = (1, 1)$ として、

$$\begin{aligned} f_1 &= (-I - A)^{-1}b = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ f_2 &= (-2I - A)^{-1}b = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

よって、

$$f = 5[1, 1] \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}^{-1} = -[3, 4]$$

このアルゴリズムには次のような利点がある。

1. f_i の一次独立性が保証されている。
2. F は逆行列の計算のみで決定される。
3. 閉ループ系の固有ベクトルを直接指定することができる。
4. 多入出力系では同一の極配置を実現するゲイン F は無数に存在するが、その決定に $\{g_i\}$ というパラメータを陽な形で指定できる。
5. A の次数が大きくても、数値的に安定な解が求まる。

上記の議論はシステムの状態が直接観測される場合には非常に有効であるが、一般には状態は観測方程式を通してしか得られない。このようなときに最も良く用いられる方法は次節で述べる状態観測器を併用したシステムを構成することである。この方法によると、フィードバックゲインと観測器は独立に設計することができる。これとは別に、状態フィードバックと観測器を別々に構成せず、1つの動的補償器により極配置を実現する方法もある。ここでは詳しく述べないが、次のことが知られている。

[定理 3.2]

システムが可制御・可観測である時、次数 q が高々 $\min(\mu_o - 1, \mu_c - 1)$ である動的補償器によって閉ループ系の $n+q$ の極を任意のものに配置することができる。ただし、 μ_o は可観測指数、 μ_c は可制御指数であり、 μ_c は $\text{rank} [B, AB, \dots, A^{\mu-1}B] = n$ となる最小の μ である。また、 μ_o は $[C^T, A^T C^T, \dots, (A^T)^{\mu-1} C^T] = n$ となる最小の μ である。ま

3.2 状態観測器

前節では、状態フィードバックにより極を配置する問題を取り扱った。しかし、実際には状態を直接観測することはできないので、前節の議論はそのまま適用するわけにはいかない。もし、何らかの形でシステムの状態の推定値 \hat{x} が入手できれば、 $u = Fx$ の代わりに $u = F\hat{x}$ とするのは最も自然であろう。実際、システムの初期値 x_0 とシステムのパラメータ (A, B, C, D) が分かっている、入力が既知であるので、システムと全く同じ回路を構成し初期状態を x_0 にセットしてシステムと同じ入力を入れてやればシステムの状態と全く同じものが得られる。ところが実際にはシステムの初期状態を入手することはできないので、このことを実現することはできない。しかし、このモデルに対して適当に実際の出力とモデルの出力の偏差をフィードバックしてやればモデルの状態がシステムのそれに近付くことが期待される。これらの関係を数式をもいで表現する。

3.2.1 同次元オブザーバ

システム行列 (A, B, C, D) が入手可能であるとしよう。このとき、状態推定器を、次のように構成する。

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(\hat{y} - y) \quad (3.23)$$

$$\hat{y} = C\hat{x} + Du \quad (3.24)$$

$\xi := \hat{x} - x$ と定義して、(3.23) から (3.1) を引くと、

$$\dot{\xi} = (A + KC)\xi \quad (3.25)$$

となる。従って、 $A + KC$ の固有値を安定にできれば $\xi \rightarrow 0$ であることが分かる。ここで前節の極配置問題を思い起こせば、 $A + KC$ の極を任意に配置できるための条件は (A^T, C^T) が可制御つまり (C, A) が可観測であることが分かる。従って、同次元オブザーバはシステムが可観測であれば構成できることが分かる。しかし、実際にオブザーバを構成することを考えると、オブザーバの次数は小さい方が好ましい場合が多い。次節では低次元のオブザーバの構成を考える。ただし、ロバスト性の観点から見ると全次元オブザーバの方が優れている場合がある。特に、高周波数帯域でのシステムの不確定性が大きい場合には優れている。また、出力ノイズが大きな影響を持っている場合には、個々にフィルタを設計するのではなく、オブザーバをフィルタの一部として設計した方が良い。

3.2.2 最小次元オブザーバ

同次元オブザーバオブザーバでは、全ての状態をモデルにより作り出していた。ところが、システムの出力は状態の線形結合として得られているので、 x の一部分は y より直接構成することが出来る。具体的には、 x の線形関数 Ux を推定する z が存在し、

$$\begin{bmatrix} z(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} U \\ C \end{bmatrix} x(t) \quad (3.26)$$

であれば、 x の推定値 \hat{x} は

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} U \\ C \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} z(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = [\hat{C}, \hat{D}] \begin{bmatrix} z(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

により構成できることが分かる。同次元オブザーバと同様に、オブザーバの入力をシステムの出力と入力とするシステムを考える。

$$\dot{z} = \hat{A}z + \hat{B}y + \hat{J}u \quad (3.28)$$

(3.1) の両変に左から U を掛けて、それから (3.28) を引くと、

$$\dot{\xi} = \hat{A}\xi + (UB - \hat{J})u + (UA - \hat{A}U - \hat{B}C)x \quad (3.29)$$

となる。ただし、 $\xi := Ux - z$ である。従って、 $\xi \rightarrow 0$ となるためには

- ある U が存在し

$$UA - \hat{A}U - \hat{B}C = 0 \quad (3.30)$$

$$UB - \hat{J} = 0 \quad (3.31)$$

- \hat{A} が漸近安定

であることが分かる。このような x を推定する $n-p$ 次元のオブザーバを最小次元オブザーバという。これより次の定理が成り立つ。

[定理 3.3] システムの出力と入力を入力とするシステム (3.28) が完全可観測なシステムの最小次元オブザーバであるための必要かつ十分条件はつぎの 2 つの条件が成り立つことである。

1. 次の条件をみたす U が存在する。

$$UA - \hat{A}U = B\hat{C} \quad (3.32)$$

$$UB - \hat{J} = 0 \quad (3.33)$$

$$\hat{J} = UB \quad (3.34)$$

2. \hat{A} が漸近安定

このような最小次元オブザーバの代表的な設計方法が Gopinath によって与えられている。[3] (極配置による方法) (Step 1)

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} C^\# \\ C \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

が正則になるように $C^\#$ を決める。これは C を特異値分解すれば簡単に求めることができる。

(Step 2)

(A, B, C) から等価なシステム $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$ を求める。

$$\bar{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

$$\bar{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

$$\bar{C} = CT = [0, I_p] \quad (3.38)$$

(Step 3)

$\bar{A}_{11} - L\bar{A}_{21}$ の固有値が安定となるように L を求め、

$$\bar{U} = [I_{n-p}, -L] \quad (3.39)$$

とする。

(Step 4)

定理の条件より、

$$\hat{A} = \bar{A}_{11} - L\bar{A}_{21} \quad (3.40)$$

$$\hat{B} = \bar{A} + \bar{A}_{12} - L\bar{A}_{22} \quad (3.41)$$

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} I_{n-p} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

$$\hat{D} = \begin{bmatrix} L \\ I_p \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

$$\hat{J} = \bar{B}_1 - L\bar{B}_2 \quad (3.44)$$

(Step 5)

 $\hat{x} = T\hat{\hat{x}}$ であるので、

$$\hat{A} = \hat{\hat{A}}, \hat{B} = \hat{\hat{B}}, \hat{C} = T\hat{\hat{C}}, \hat{D} = T\hat{\hat{D}}, \hat{J} = \hat{\hat{J}} \quad (3.45)$$

上記の観測器は確かにシステムの状態を推定することはできるが、この節の最初に述べたように、 $u = F\hat{x}$ として良いという保証はまだ得られていない。しかし、これは次節で述べるように肯定的に示される。

3.2.3 推定された状態によるフィードバック系の特徴

状態フィードバックによって指定した極配置を実現するフィードバックゲインを F とする。このとき、前節で構成したオブザーバを用いて入力を $u = F\hat{x}$ とすることを考える。これより、システムとオブザーバを併合した閉ループ系は次の拡大系で表現される。

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3.46)$$

$$\dot{z} = \hat{B}y + \hat{A}z + \hat{B}u \quad (3.47)$$

つまり、

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ \hat{B}C & \hat{A} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ \hat{J} \end{bmatrix} u \quad (3.48)$$

ここで、 $u = F\hat{x} = F(\hat{C}z + \hat{D}Cx)$ を代入すると、

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BF\hat{D}C & BF\hat{C} \\ \hat{B}C + \hat{J}F\hat{D}C & \hat{A} + \hat{J}F\hat{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} := \tilde{A} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

この閉ループ系の極は座標変換によって変化しないので、 \tilde{A} を等価変換する。変換行列を次のようにする。

$$T = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ U & I_{n-p} \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -U & I_{n-p} \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

これより、

$$\tilde{A}T = \begin{bmatrix} A + BF\hat{D}C + BF\hat{C}U & BF\hat{C} \\ \hat{D}C + \hat{J}F\hat{D}C + \hat{A}U + \hat{J}F\hat{C}U & \hat{A} + \hat{J}F\hat{C} \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

ここで、 $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{J}, \hat{C}, \hat{D})$ の関係を用いると、

$$= \begin{bmatrix} A + BF & BF\hat{C} \\ UA + \hat{J}F & \hat{A} + \hat{J}F\hat{C} \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

更に、左から t^{-1} を作用すると、

$$T^{-1}\tilde{A}T = \begin{bmatrix} A + BF & BF\hat{C} \\ 0 & \hat{A} \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

従って、閉ループ系の特性方程式は、

$$\det(T^{-1}\tilde{A}T) = \det(sI - A - BF)\det(sI - \hat{A}) \quad (3.54)$$

となり、閉ループ系の極は指定した極とオブザーバの極との集合となり、全ての極は安定であるから閉ループ系は安定となる。

3.3 最適レギュレータ

3.1節では状態フィードバックによるシステムの安定化について述べた。また、システムの極を指定したところに配置する手法について解説した。一般に極の実部を複素左半平面の虚軸よりも遠いところにより、任意の初期状態より早くゼロ状態にもっていくことが出来る。このようにシステムの状態をゼロ状態にする制御系をレギュレータという。(ここで、注意しなければならないのは、一般にシステムは非線形であり、取り扱われている線形モデルはある平衡点回りのモデルであり、ゼロ状態はこの平衡点に対応することである。)しかし、速応性を上げると一般に入力は大きくなり、制御入力の飽和を考慮すると極の配置される領域は制限される。しかし、どのように極を配置すれば、速応性を確保し入力を押えることが出来るかを前もって決めることは困難である。特に、システムが多入出力系となると、自由度が大き過ぎて非常に難しい。そこで、速応性と入力の大きさを時間領域で評価する適当な評価関数を考えることにより、制御系を設計することは自然な発想であろう。本節では、時間領域での物理的に意味のある評価関数を最適にすることによりレギュレータを設計する方法について述べる。

3.3.1 2次形式評価関数による最適レギュレータ

システム (A, B, C, D) を考える。このシステムに対して、次の2次形式評価関数を考える。

$$J(x_0, u, T) = \int_0^T x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)dt \quad (3.55)$$

ただし、 Q, R は対称で

$$Q \geq 0, R > 0, T \in (0, \infty]$$

である。この評価関数の意味は、ゼロ状態からの状態 x とそれをゼロにする入力 u にそれぞれ適当な重み付けをしたものの2形式を時間的に積分することにより、速応性と入力の大きさを適当に押えた制御入力が設計できるであろうと考えたものである。もし、システムの出力を評価したいのであれば、

$$Q = C^T C \quad (3.56)$$

とすればよい。ここで考える問題は(3.55)の評価関数を最小化する入力 u を見つけることである。もちろん、このように決定された入力に対しては、評価関数は有限なものになるので、被積分関数はゼロに収束しなければならず、適当な条件の下にシステムの状態がゼロになることは推測されよう。この問題に対する解は次の定理で与えられる。

[定理 3.4][5]

対称行列 $P(t)$ が次の行列リカッチ微分方程式:

$$-\dot{P} = P(t)A + A^T P(t) - P(t)B^T R^{-1} P(t) + Q, P(T) = 0 \quad (3.57)$$

の解とする。この時の評価関数の最小値は、

$$J(x_0, u^*, T) = x_0^T P(0) x_0 \quad (3.58)$$

で与えられ、最適入力 u^* は、

$$u^*(t) = F(t)x(t), F(t) = -R^{-1}B^T P(t) \quad (3.59)$$

で与えられる。

この評価関数を最適にする入力を最適レギュレータといい、実は後に述べるように評価関数を最小化する以外にシステム論的に重要な性質を持っている。

この解に注目すると、最適な解は状態のフィードバックによって与えられるという非常に著しい特徴がある。 T が有限の時は、リカッチ微分方程式の形より一般に最適ゲイン $F(t)$ は時間の関数となる。これでは、実際にこの入力を用いるとしようとするとき $K(t)$ を記憶する必要があり、あまり実用的でない。このため、 T を ∞ としよう。このとき、次のことが知られている。

[定理 3.5]

(A, B) が可制御であれば、行列リカッチ微分方程式 (3.57) は、 $T \rightarrow \infty$ で定係数行列 $P \geq 0$ に収束し、次のリカッチ方程式を満たす。

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (3.60)$$

このとき、評価関数を最小にする入力は

$$u^*(t) = Fx(t), \quad F = -R^{-1}B^T P \quad (3.61)$$

で与えられ、その最小値は、

$$J(x_0, u^*, \infty) = x_0^T P x_0 \quad (3.62)$$

となる。

この解による入力は、低係数の状態フィードバックになっており、閉ループ系は次式で与えられる。

$$\dot{x} = (A - BR^{-1}B^T P)x \quad (3.63)$$

ここで注意すべきことは、定理の条件だけではこのシステムが安定であるとは限らないことである。もちろん、 $Q > 0$ なる条件を付け加えればシステムが漸近安定となることは明らかであろう。評価関数が有限の値を持ちかつシステムが安定化されないのは、その不安定モードが Q を通して積分に表れない場合である。従って、 $Q \geq 0$ は $Q = H^T H$ と表現できるので、 (C, A) が可検出であれば閉ループ系は安定であることが分かるであろう。システムの可安定性・可検出性とリカッチ方程式の解の間には次のような関係があることが知られている。

[定理 3.6]

(A, B) が可安定で、 (C, A) が可検出であれば (3.60) は唯一の非負定解 P を持ち、これより構成される閉ループ系 (3.63) は安定である。ただし、 $Q = C^T C$ である。

3.3.2 定常リカッチ方程式の解法

前節で、定常な最適レギュレータが (定常) リカッチ方程式の解を用いて得られることを示した。本節で、解 P の具体的な求め方を示す。[6]

A, Q, R を $n \times n$ 実行列で、 Q と R は対称とする。このとき

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} A & R \\ Q & -A^T \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

で定義される $2n \times 2n$ の行列をハミルトン行列という。この \mathcal{H} に対しては、 λ が \mathcal{H} の固有値であれば λ^* も固有値である。実際、

$$\mathcal{H}v = \lambda v, \quad v = [v_1^T, v_2^T]^T \quad (3.65)$$

であるとすると、

$$Av_1 + Rv_2 = \lambda v_1 \rightarrow -v_2^T R - v_1^T A^T = -\lambda v_1^T \quad (3.66)$$

$$Qv_1 - A^T v_2 = \lambda v_2 \rightarrow -v_2^T A + v_1^T Q = -\lambda(-v_2^T) \quad (3.67)$$

これより、

$$[v_1^T, -v_2^T] \begin{bmatrix} -A^T & Q \\ R & A \end{bmatrix} = -\lambda [v_1^T, -v_2^T] \quad (3.68)$$

となり、 $-\lambda$ も \mathcal{H} の固有値であることが分かる。今、次の条件を仮定する。

[条件1] \mathcal{H} が虚軸上に固有値を持たない。

これより、 \mathcal{H} は $Re \lambda < 0$ なる固有値を n 個持つことになる。この安定な固有値に対する固有ベクトルを(一般化固有ベクトルを含めて) z_1, \dots, z_n とする。これより、

$$\mathcal{H}Z = ZJ \quad (3.69)$$

ただし、 J は $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ を固有値とするジョルダン標準形。ここで、行列 Z を次のように分解する。

$$Z = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

もし、

[条件2] X が正則である。

であれば、 $P = YX^{-1}$ とする。これより、

$$\mathcal{H} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} J \quad (3.71)$$

となる。これを P を用いて書き換える、

$$\mathcal{H} \begin{bmatrix} I \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ P \end{bmatrix} XJX^{-1} \quad (3.72)$$

となり、左から $[P, -I]$ を作用させると、

$$[P, -I] \mathcal{H} \begin{bmatrix} I \\ P \end{bmatrix} = PA + A^T P + PRP - Q = 0 \quad (3.73)$$

となり、 P は次の定常リカッチ方程式の解となっていることが分かる。

$$PA + A^T P + PRP - Q = 0 \quad (3.74)$$

さらに、(3.72)の上半分より、

$$(A + RP)X = XJ \quad (3.75)$$

であるから、 $A + RP$ の固有値は全て安定であることが分かる。ここで、前節の最適レギュレータの場合と比較すると、

$$R \rightarrow -BR^{-1}B^T, \quad Q \rightarrow -Q \quad (3.76)$$

とすれば対応する P が求まることが分かる。以上の議論では、条件1と条件2が満たされていることを仮定していたが、 $R = -BB^T, Q = -C^T C$ であるときはそれらの条件はシステムの性質として次のものに等価であることが知られている。

[条件1']

システムが虚軸上に極を持つならば、その極に関して $\text{rank}[\lambda I - A, B] = n$ かつ $\text{rank}[\lambda I - A^T, C^T] = n$ である。

[条件2']

条件1'を満たし、システムが可安定である。つまり、 $\text{rank}[sI - A, B] = n, \text{ for } \lambda \in C^+$ である。

このように、 Q, R が特殊な形をしている場合には、 P の性質について良く知られている。さらに、 R が半正定または半負定で Q が対称であるあるとき、条件1が満たされ、かつ (A, R) が可安定であれば条件2が成立することが知られている。ところが、 R が不定の場合には P の性質については知られていないようである。ところが、 H_∞ 制御では、 R が不定である場合があり、このような場合には実際に方程式をときその解の性質を調べる他に方法がない。

3.3.3 最適レギュレータの性質

最適レギュレータは2次形式評価関数を最小化するものとして導かれた。この評価関数には、 x の収束の早さと入力の大さのトレード・オフをとるという実際的な意味も含まれていた。例えば、ある Q 、 R を用いてえられた解に対して、収束の速度が十分でなかった場合には、 Q の適当な要素を大きくすることによりある程度その速応性を改善することが出来る。しかし、実はこの最適レギュレータは Q 、 R の値に関係なくある種の性質を持っていることが知られている。それを述べよう。

円条件

(3.60)の方程式を周波数領域で考える。このため、次のように式を変形する。

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P = -Q \quad (3.77)$$

上式を $sP - sP$ より引くと、

$$P(sI - A) - (sI - A^T)P + F^T R F = Q \quad (3.78)$$

さらに、右から $(sI - A)^{-1}B$ 、左から $B^T(sI - A^T)^{-1}$ を掛けると、

$$-B^T(sI - A^T)^{-1}F^T R - RF(sI - A)^{-1} + B^T(sI - A^T)^{-1}F^T R F(sI - A)^{-1}B = B^T(sI - A^T)^{-1}Q(sI - A)^{-1}B \quad (3.79)$$

両辺に R を加えて整理すると、

$$(I - F(sI - A)^{-1}B)^T R (I - F(sI - A)^{-1}B) = R + B^T(sI - A^T)^{-1}Q(sI - A)^{-1}B \quad (3.80)$$

となる。ここで $s = j\omega$ とおくと、上式右辺第2項は半正定であるから、

$$(I - F(j\omega - A)^{-1}B)^T R (I - F(j\omega - A)^{-1}B) \geq R \quad (3.81)$$

が導かれる。ここで、上式はパラメータ Q に依存しないことを注意する。

いま次の一入力一出力のシステムを考える。

$$\dot{x} = Ax + bu \quad (3.82)$$

$$y = x \quad (3.83)$$

これに対して、

$$u = fu, \quad f = -r^{-1}b^T P \quad (3.84)$$

とすると、(3.81)の条件は、

$$|1 - f(j\omega - A)^{-1}b| \geq 1 \quad (3.85)$$

となる。いま、 $L(s) := -f(sI - A)^{-1}b$ とすると上の条件は、

$$|1 + L(j\omega)| \geq 1 \quad (3.86)$$

となる。これは図3.3.3の一巡伝達関数のナイキストプロットが $(-1, 0)$ を中心とする半径1の円の中に入らないことを意味している。この関係をプロットすると次のようになる。この図より2章で定義されたゲイン余裕、位相余裕を簡単に求めることが出来る。ゲイン余裕は、実軸と軌跡が交わる点がゲインが何倍かした時に $(-1, 0)$ を通るものであったが、 $(-2, 0)$ を通るものを考えると $L(s)$ のゲインが $1/2$ になったときに $(-1, 0)$ を通る。従って、ゲイン余裕が無大とな

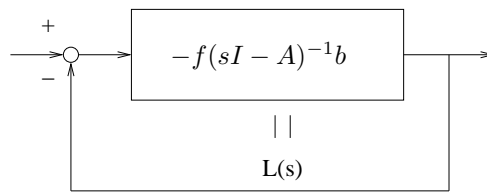


図 3.1: 一入出力系の最適レギュレータ

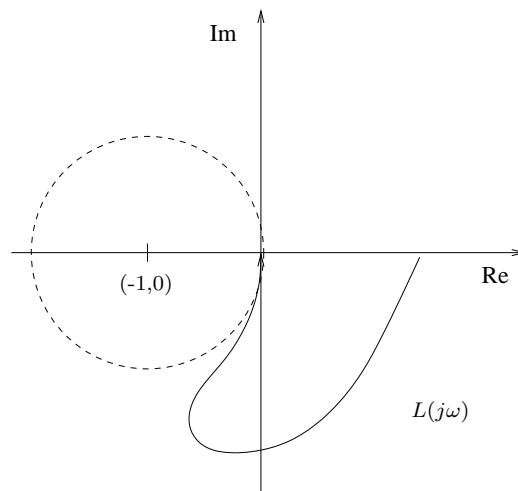


図 3.2: 最適レギュレータの円条件

る。また、位相余裕は、原点を中心とする半径 1 の円とナイキストプロットが交わった点と実軸がなす角度であったから、少なくとも 60° 以上あることが分かる。

次に感度関数を考えてみると、 $S(s) = (1 - L(s))^{-1}$ であるから、

$$|S(j\omega)| \leq 1 \quad (3.87)$$

となり、任意の周波数で感度が 1 以下になっていることが分かる。また、ナイキストプロットより、位相遅れは高々 90° であることが分かる。以上述べた性質は、一入力一出力系の幾何学的な考察により得られたものであるが、多入出力系に対しても同様のことが成り立つ。まず、一入力一出力系の性質についてまとめておく。

1. $L(s)$ の位相遅れは高々 90° である。
2. $L(s)$ のゲイン余裕は無限大、位相余裕は 60° である。
3. $L(s)$ の単一フィードバック系の感度は全て 1 以下。

この性質 1.2.3. は多入出力系に対しても満たされる。

1. 漸近的な位相遅れ

$$L(s) := -F(sI - A)^{-1}B, \quad F = -R^{-1}B^T P \quad (3.88)$$

とする。これより、

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sL(s) = -FB = R^{-1}B^T P B = R^{-1/2}(R^{-1/2}B^T P B R^{-1/2})R^{1/2} = R^{-1/2}(R^{-1/2}V R^{-1/2})R^{1/2} \quad (3.89)$$

となる。 B がフルランクであれば、 V は正定となる。これより、 $\lim_{s \rightarrow \infty} sL(s)$ の固有値は全て正となる。いまそれらを $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ とすると

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sTL(s)T^{-1} = \text{diga}(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \quad (3.90)$$

となる。従って、 $TL(s)T^{-1}$ の対角の位相遅れは高々 90° であることを示している。

2. 安定余裕

図 3.3.3 のように、入力部分にメモリのない非線形要素を挿入する。このシステムの方程式は、

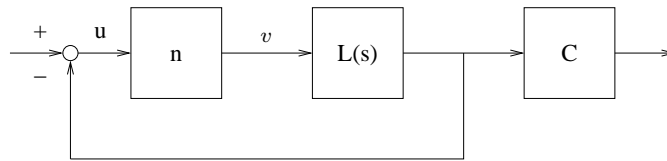


図 3.3: 入力部へのメモリのない非線形要素の挿入

$$\dot{x} = Ax + bf(u), \quad u = -R^{-1}B^T Px \quad (3.91)$$

$$y = Cx \quad (3.92)$$

この時次のことが成立する。

[定理 3.7]

(A, B) が可安定、 $Q = H^T H$ で (H, A) が可検出で (3.92) が $[0, \infty)$ で解を持つとする。 $f()$ が次の条件:

$$\frac{1+\epsilon}{2}u^T R^{-1}u \leq u^T f(R^{-1}u), \quad f(0) = 0 \quad (3.93)$$

を満たすならば、システムは漸近安定である。

この非線形性をグラフにすると、図 3.3.3 のようなセクター条件を満たすものであることがわかる。つまり、 f がスカラである場合は、 f の入出力のグラフが第 1 章限では右斜め 30° の直線よりも上にあることである。これは f が線形である場合、ゲインが $1/2$ より大きいことに対応している。

3. 位相余裕

2. では変動としてメモリのないものを考えたが、ここでは安定な線形の動的システムが入力部に挿入された場合を考える。(図 3.3.3) このとき、外部入力が存在しないとすると閉ループ系は自由系と表現できる。

$$\dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} \quad (3.94)$$

$$y = \hat{C}\hat{x} \quad (3.95)$$

このとき次の定理が成り立つ。

[定理 3.8]

(A, B) が可安定、 (H, A) が可検出であり、

$$\Delta(j\omega)R^{-1} + R^{-1}\Delta^*(j\omega) \geq R^{-1} \quad (3.96)$$

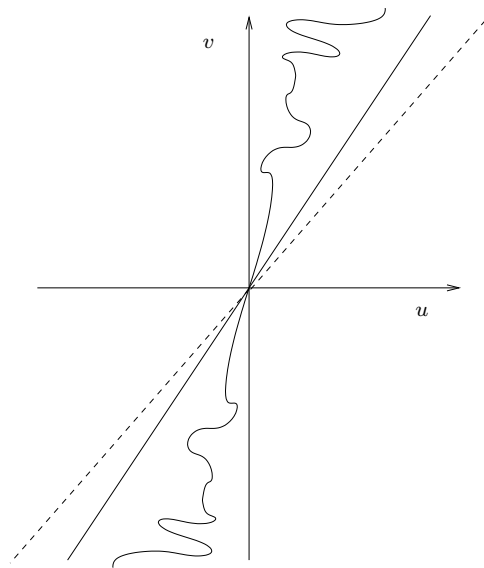


図 3.4: 非線形要素のセクター条件

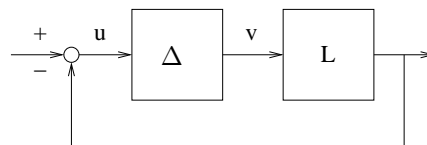


図 3.5: 入力部への動的システムの挿入

であるならば、閉ループ系は安定である。

$\Delta(j\omega)$ がスカラで $e^{j\phi}$ とすると (3.96) の条件は、

$$e^{j\phi} + e^{-j\phi} = 2\cos\phi \geq 1 \rightarrow |\phi| \leq \frac{\pi}{3} \quad (3.97)$$

となり、(3.96) の条件はスカラ系の自然な拡張になっていることが分かる。また、感度関数に対しても同様なことが成り立つことが簡単に示せる。

3.4 サーボ系の設計

前章までは、システムの状態をゼロ状態にする、レギュレータ問題について述べてきた。レギュレータ問題は、制御系の設計手法の基本的考え方を与えており、非常に重要であるが、前章までの設計法で与えられるレギュレータは、実用上は問題が多い。前章では、システムは、完全に合っており、システム外部からの外乱については、一切考慮されていない。しかし、 (A, B, C, D) で与えられるモデルは、非線形システムの一次近似であり、また、制御器のドリフト等が存在するので、それらを考慮しなければならない。

本章では、外乱や目標値が存在する場合に、システムの出力をある目標値に完全に追従させる制御系について説明する。特に、目標値や外乱などの外生信号が、有限次元線形系の出力で与えられる場合に対する有効な制御を、サーボ系、または、出力レギュレータ [2] と呼ぶ。この制御系が、前章までのレギュレータと異なる点は、定常状態において、出力

偏差がゼロにならなければならない点である。つまり、ここで考える制御系は、次の2点を同時に満たさなければならない。

- (1) システムの内部安定性が保証される。
- (2) 出力レギュレーションが達成される。

この制御系がパラメータ変動等に対して、ロバストとなるためには、補償器、外生信号の種類に関わらずある特殊な条件を満たさなければならない。これは、Wonhamらが与えた「内部モデル原理」と言われるものである。本章は、最終的には、この原理を説明することを目的とし、最初は、比較的易しい問題から始める。また、「内部モデル原理」の厳密な証明にまでは立ち入らない。

3.4.1 ステップ状目標値に対するフィードフォワード制御系

今、次の可安定かつ可検出なシステムを考える。

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad A \in R^{n \times n}, \quad B \in R^{n \times m}, \quad C \in R^{p \times n} \quad (3.98)$$

$$y = Cx \quad (3.99)$$

ただし、 $\text{rank } B = m, \text{rank } C = p$ と仮定する。このシステムに対して、 $y(t)$ をゼロでない一定の目標値 y_0 に近づけることを考える。つまり、 $\lim y(t) \rightarrow y_0(t)$ 。このため、次式を満たす x_0 を選び、

$$y_0 = Cx_0 \quad (3.100)$$

\tilde{x} を

$$\tilde{x} := x(t) - x_0$$

とし、 $\tilde{x} \rightarrow 0$ となるような制御系を考える。(3.99) より、

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + Bu + Ax_0 \quad (3.101)$$

であるが、もし、 $\tilde{x} \rightarrow 0$ となるなら、当然 $\dot{\tilde{x}} \rightarrow 0$ であるから、

$$Bu_0 + Ax_0 = 0 \quad (3.102)$$

を満たす u_0 が存在して、 $\lim u(t) \rightarrow u_0$ とならねばならない。ここで、 $\tilde{u} = u(t) - u_0$ とおくと、(3.101) より、

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + B\tilde{u} \quad (3.103)$$

となり、 \tilde{x} を 0 にするレギュレータ問題に帰着される。従って、(3.103) を安定化するフィードバックゲインを F とすると、

$$\tilde{u} = F\tilde{x} = Fx - Fx_0 \quad (3.104)$$

従って、

$$u = Fx - Fx_0 + u_0 := Fx + \tilde{u}_0, \quad \tilde{u}_0 = -Fx_0 + u_0 \quad (3.105)$$

となる。この関係をブロック線図にすると、となる。(u_0, x_0) は、具体的には、(3.100),(3.102) より、

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ u_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ y_0 \end{bmatrix} \quad (3.106)$$

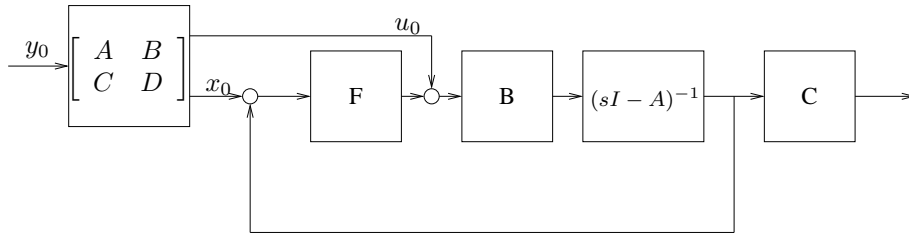


図 3.6: フィードフォワードによるサーボ系

を満足しなければならない。明らかに、

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = n + p \quad (3.107)$$

であれば、任意の y_0 に対して、 (x_0, u_0) が存在する。逆に、実は (3.106) は、必要条件でもある。実際、今、

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} < n + p \quad (3.108)$$

であるとすると、 $\xi \in R^n, \eta \in R^p$ が存在して、

$$\xi^T A + \eta^T C = 0, \quad \xi^T B = 0, \quad \|\xi\|^2 + \|\eta\|^2 \neq 0 \quad (3.109)$$

となることになる。今、 $\eta^T y_0 \neq 0$ となる任意のベクトル y_0 に対して、(3.106) を満たす (x_0, u_0) が存在するとしよう。(3.106) 式の左から、 $[\xi^T \quad \eta^T]$ をかけると、

$$[\xi^T \quad \eta^T] \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ u_0 \end{bmatrix} = [\xi^T A + \eta^T C \quad \xi^T B] \begin{bmatrix} x_0 \\ u_0 \end{bmatrix} = [0 \ 0] = [0 \ \eta^T y_0] \quad (3.110)$$

で、 $\eta^T y_0 = 0$ となり、 y_0 の選び方に反する。従って、 $\eta = 0$ でなければならない。ところが、このことは、 $\xi^T A = 0$ 、 $\xi^T B = 0$ となり、 $[\lambda I - A \ B]$ は、 $\lambda = 0$ でフルランクでなくなり、可安定性に反する。従って、(3.107) は、必要である。この結果を定理の形にまとめる。

[定理 3.9]

任意の y_0 に対して、(3.104) を満足する、フィードフォワード形最適レギュレータが存在するための、必要十分条件は、(3.106) で与えられる。

(注)

(1) (3.106) より、明らかなように、 $m \geq p$ である。

(2) (3.106) は、 $\begin{bmatrix} sI - A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}$ 、 $s = 0$ に対して、 $\det \begin{bmatrix} sI - A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}$ がゼロにならないことを示している。つまり、 $s = 0$ が、システムのゼロ点ではないことを示している。これは、例えば、

$$G(s) = \frac{s}{s+1}$$

に対して、古典制御理論で言うところの、1型の補償器では、望ましい定常特性が、得られないことに対応している。実際、

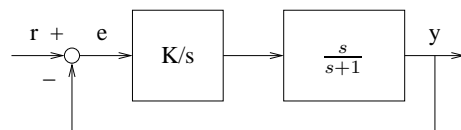


図 3.7: 外乱のモードをゼロ点に持つシステム

$\lim_{t \rightarrow \infty} e = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{k}{s+1}} \frac{r}{s} = \frac{1}{1+k}$ となり、ゼロとはならない。 $G(s)$ の分子に、ゼロがなければ、 $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{r}{1 + \frac{k}{s(s+1)}} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s(s+1)}{s(s+1) + k} = 0$ となる。

ここで、このシステムのパラメータ変動に対する定常誤差を考える。今、 (A, B) が、 (A_1, B_1) に変化したと考えると、閉ループ系は、

$$\dot{x} = (A_1 + B_1 F)x + B_1 \tilde{u}_0 \quad (3.111)$$

となる。 $(A_1 + B_1 F)$ が安定であれば、 $t \rightarrow \infty$ で、

$$\tilde{x}_0 = -(A_1 + B_1 F)^{-1} B_1 \tilde{u}_0 \quad (3.112)$$

が成立する。従って、

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = c\tilde{x}_0 &= y_0 - C(A_1 + B_1 F)^{-1}(A_1 + B_1 F)x_0 \\ &= y_0 - C(A_1 + B_1 F)(A_1 x_0 + B_1 u_0) \end{aligned}$$

となり、右辺第 2 項が、定常偏差として残ることになる。

3.4.2 積分型最適レギュレータ

前節の問題に対して、システムのパラメータに対してロバストな、積分型最適レギュレータを導く。(3.107) が成立していると仮定し、前節と同様、 $\tilde{x} = x - x_0$ とし、新しい変数 v を導入して、 $\dot{\tilde{u}} = v$ とする。これより拡大系は、

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{u} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} v \quad (3.113)$$

ここで、

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}, \quad \tilde{C} = [C \ 0]$$

とする。明らかに、 (A, B) が可制御であれば、 (\tilde{A}, \tilde{B}) も可制御となり、 (C, A) が可観測であれば、 $p = m$ として、(3.107) の条件を用いて、

$$\begin{bmatrix} C & 0 \\ CA & CB \\ CA^2 & CAB \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_p \\ C & 0 \\ CA & \vdots \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \quad (3.114)$$

となり、 (\tilde{C}, \tilde{A}) は、可観測となる。従って、拡張されたシステムに対して、

$$J = \int_0^{\infty} (y^T Q y + v^T R v) dt, \quad Q > 0, \quad R > 0 \quad (3.115)$$

を考え、これに対するリカッチ方程式の解を、

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12}^T & p_{22} \end{bmatrix} \quad (3.116)$$

とおくと、

$$\begin{aligned} p_{11}A + A^T p_{11} - p_{12}R^{-1}p_{12}^T + C^T Q C &= 0 \\ p_{11}B + A^T p_{12} - p_{12}R^{-1}p_{22} &= 0 \\ p_{12}^T B + B^T p_{12} - p_{22}R^{-1}p_{22} &= 0 \end{aligned} \quad (3.117)$$

となる。この時、最適レギュレータは、

$$\begin{aligned} v &= F_1 \tilde{x} + F_2 \tilde{u} \\ F_1 &= -R^{-1}p_{12}^T, \quad F_2 = -R^{-1}p_{22} \end{aligned} \quad (3.118)$$

(3.103) 式の両辺に左から B^T を掛けると、

$$B^T \dot{\tilde{x}} = B^T A \tilde{x} + B^T B \tilde{u} \quad (3.119)$$

仮定より、 B はフルランクであるから、

$$\tilde{u} = (B^T B)^{-1} (B^T A \tilde{x} - B^T \dot{\tilde{x}}) \quad (3.120)$$

これを (3.118) に代入して、

$$\dot{u} = L_1 \tilde{x} + L_2 \dot{\tilde{x}}$$

ただし、

$$L_1 = F_1 - F_2 (B^T B)^{-1} B^T A, \quad L_2 = F_2 (B^T B)^{-1} B^T$$

を得る。従って、実際には、

$$u = L_2 \tilde{x} + L_1 \int \tilde{x} dt \quad (3.121)$$

となり、比例 + 積分により、制御系が構成される。この場合の閉ループ系を次に示す。

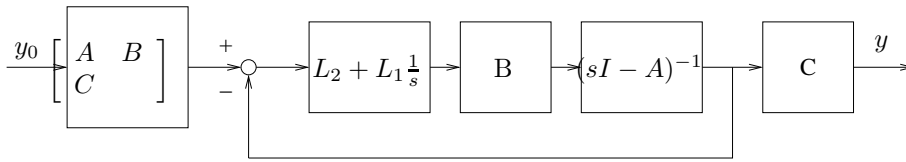


図 3.8: 積分型最適レギュレータ

この系が、実際にパラメータ変動に対して、定常偏差をゼロにしていることを示そう。(3.121) と等価な関係 (3.118) を (3.113) に代入して、

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ F_1 & F_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{u} \end{bmatrix} \quad (3.122)$$

これより、 (A, B) が、 (A_1, B_1) に変動しても、上記のシステムが安定である限り、 $\tilde{x} \rightarrow 0$ となり、出力レギュレーションが達成されることが分かる。

3.4.3 出力レギュレーションと内部モデル原理

前述のフィードフォワード形最適レギュレータと、フィードバック形最適レギュレータを比較してみよう。性質としては、前者がパラメータ変動に対してロバストでないのに対して、後者はロバストである。構成的には、前者が、積分器を含まないのに対して、後者では、 p 個の積分器を含むことである。この積分器は、ロバスト性に対して、必要なのだろうか。実は、この p 個の積分器が、ロバスト性のための、必要かつ十分条件なのである。

今問題を次のように定式化する。

$$\begin{aligned} x &= Ax + Bu \\ y &= Cx, z = Dx \end{aligned} \quad (3.123)$$

ただし、

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ C = [C_1 \ C_2], D = [D_1 \ D_2]$$

ただし、 $x_1 \in R^{n_1}$ は、制御対象の状態ベクトル、 $x_2 \in R^{n_2}$ は、外生信号 (外乱) をつくる状態ベクトル、 $u \in R^m$ は、プラントへの制御入力、 $y \in R^{p_2}$ は観測出力、 $z \in R^{p_1}$ は、偏差ベクトルである。また、 A_3 の固有値は、すべて不安定である。このようなシステムに対して、 $z(t) \rightarrow 0$ を満たす内部安定なレギュレータは、次のフィードバックにより与えられることが知られている。

$$u = F_1 x_1 + F_2 x_2 = Fx \quad (3.124)$$

実は、3.4.1 節で求めた方法は、これの最も簡単なものであった。このように、状態フィードバック (または、外乱のフィードフォワード) によって、内部安定な出力レギュレータが構成できるための十分条件は、次の定理で与えられる。

[定理 3.10]

(1) $\text{rank} \begin{bmatrix} \lambda_i - A & B_1 \\ D_1 & 0 \end{bmatrix} = n_i + p$ for $\lambda_i \in \sigma(A_3)$ であれば (3.124) 式の制御則によって (3.128) の出力をレギュレートする F_1, F_2 が存在する。

(注)

(3.99) では、 $\lambda_i = 0$ に対する条件、 $\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}$ に対応する。ここで、注意しなければならないことは、このランク条件は十分条件であることである。

次に、 $C = D$ の場合、 (D, A, B) に対して Fx を実現するオブザーバが

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \hat{A}\xi + \hat{G}z + \hat{U}u \\ u &= \hat{H}\xi + \hat{J}z \end{aligned} \quad (3.125)$$

で与えられるとき、つまり、

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= (\hat{A} + \hat{U}\hat{H})\xi + (G + UJ)z \\ u &= H\xi + Jz \end{aligned} \quad (3.126)$$

とするとき、次の非常に興味深い性質あがる。

[定理 3.11]

(D, A) は可制御であるとする。このとき $W \in R^{n_1+n_2}$, $Q \in R^{n_1 \times n_2}$ が存在して、

$$(i) \quad (\hat{A} + \hat{U}\hat{H})WQ = WQA_3 \quad (3.127)$$

$$(ii) \quad \text{rank } WQ = n_2 \quad (3.128)$$

今、 $X = [V \ W \ Q]$ が正則になるように選べば、 $X^{-1}(\hat{A} + \hat{U}\hat{H})X = \begin{bmatrix} * & 0 \\ & A_3 \end{bmatrix}$

この定理の意味する所は、レギュレーションを実現する補償器が外部信号のダイナミックスの「モデル」を内部に含んでいることである。しかし、この条件は必要条件であるが (A_1, A_2, B_1) の変動に対してロバストな出力レギュレータであるための十分条件ではない。このように (A_1, A_2, B_1) が安定性を保つように変動したとき、出力レギュレーションが達成されるような系を構造安定であるという。今、簡単な例として次の多入出力系を考える。

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + u_1, & \ddot{x}_3 &= 0 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + u_2, & \dot{x}_5 &= 0 \end{aligned} \tag{3.129}$$

$$z_1 = x_3 - x_1, \quad z_2 = x_5 - x_2 \tag{3.130}$$

これに対して次の補償器を考える。

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1(s) & 0 \\ 0 & T_2(s) \end{bmatrix}, \quad T_1(s) = \frac{(2s+1)}{s^2}, \quad T_2(s) = \frac{1}{s} \tag{3.131}$$

従って、 T_1, T_2 は、それぞれ x_3, x_2 のモデルを補償器の内部に含んでいる。明らかにこの補償器に対して、偏差はゼロになる。ところが、2つのシステムに干渉が生じ、図の破線のようなループが出来るとき、ループではランプ上の外乱

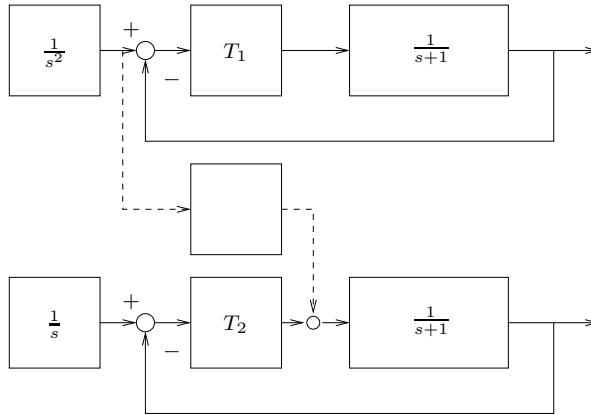


図 3.9: ϵ による干渉があるシステム

を除去することはできない。上のシステムを (3.123) に対応させて表記すると

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dot{x}_3 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dot{x}_3 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \tag{3.132}$$

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dot{x}_3 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \dot{\xi}_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \dot{\xi}_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

(3.123) のパラメータで表すと、

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \dot{\xi}_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

となり、(3.126) の補償器に対応して、それらのパラメータは、

$$(\hat{A} + \hat{U}\hat{H}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad CT + UJ = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad J = 0$$

となる。明らかに補償器の内部に目標値のモデルを含んでいる。ブロック線図でそのループを付加することは、

$$A_2 \longrightarrow A'_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \epsilon & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

と変動させたことに等しい。つまり、(3.131) で与えられるレギュレータは構造安定ではない。しかし、 T_2 を T_1 に置き換えれば、 ϵ によるオフセットは消える。この例から分かるように、各出力に対して外成信号の最も「悪い」モデルをそれぞれのループが含んでいけばよいことが分かるであろう。

今、出力レギュレータを実現する補償器を次のように表す、

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= A_c \xi + B_c z \\ u &= K_c \xi + K_1 x_1 \end{aligned} \tag{3.133}$$

このとき、次の定理が成り立つ。

[定理 3.12]

(3.133) が構造安定な出力レギュレータであるための必要条件は、

- i) $\lambda \in \sigma(A_3)$ に対して、 A_c は、ジョルダン標準形は p 個の次数 $\nu(\lambda)$ 以上のジョルダンブロックを含む。ここで、 $\nu(\lambda)$ は、 A_3 のジョルダン標準形の固有値 λ に対応するジョルダンブロックの次数の最大値である。
- ii) すべての $\lambda \in \sigma(A_3)$ に対して

$$\begin{aligned} \text{rank} [\lambda I - A_c \ B_c] &= n_c \\ \text{rank} \begin{bmatrix} \lambda I - A_c \\ K_c \end{bmatrix} &= n_c \end{aligned}$$

定理の i) の条件を補償器が満たすとき、補償器は外生変数形の内部モデルを含むという。また、i) の必要性を内部モデル原理という。しかし、 $p = 1$ の場合には、補償器の内に単にモデルを含んでいることを要求しているだけである。つまり、この定理の意味が重要になるのは、 $p = 2$ 以上の場合である。 $p = 1$ の場合には、単純に古典制御理論の型の考え方に一致する。このようなロバストなサーボ系の設計方法は、ステップ状の目標に対して次に述べる Smith, Davison の方法が有名である。

[Smith, Davison の方法]

$$\dot{x} = Ax + Bu + Dw \quad (3.134)$$

$$y = Cx \quad (3.135)$$

なるシステムに対して、 $y \rightarrow y_d$ となる制御系を構成すること考える。

$$e := y - y_d \quad (3.136)$$

ただし、 y_d は一定な目標値、 w は一定外乱とする。これより、

$$\dot{e} = ce \quad (3.137)$$

であるから、

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \dot{u} \quad (3.138)$$

$$e = [0 \ I_p] \begin{bmatrix} \dot{x} \\ e \end{bmatrix} \quad (3.139)$$

なる拡大系を得る。いま、サーボの条件

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = n + p$$

が、満たされており、 (A, C) が可観測であれば、明らかに拡大系は可観測であり、サーボの条件より可制御となる。従って、次の評価関数

$$J = \int_0^\infty \left\{ \begin{bmatrix} \dot{x} \\ e \end{bmatrix}^T Q \begin{bmatrix} \dot{x} \\ e \end{bmatrix} + \dot{u}^T R \dot{u} \right\} dt$$

を最小化するフィードバック則を求め、

$$\dot{u} = [F_1 \ F_2] \begin{bmatrix} \dot{x} \\ e \end{bmatrix}$$

とし、この初期状態をゼロとする

$$u = F_1 x + F_2 \int_0^\tau e dt$$

となる制御則が得られる。

3章の定理の証明

[定理 3.4 の証明]

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(x^T(t)P(t)x(t)) &= \dot{x}^T Px + x^T \dot{P}x + x^T P\dot{x} \\
&= (Ax + Bu)^T Px - x^T (PA + A^T P - PB^T R^{-1}BP + Q)x + xP(Ax + Bu) \\
&= -x^T Qx + u^T B^T Px + x^T PB^T R^{-1}BPx + x^T PBu \\
&= -x^T Qx - u^T Ru + u^T Ru + u^T B^T Px + x^T PBu + x^T PB^T R^{-1}BPx \\
&= -x^T Qx - u^T Ru + (u + R^{-1}B^T Px)^T R(u + R^{-1}B^T Px)
\end{aligned} \tag{3.140}$$

これより、両辺を 0 から T まで積分すると、

$$x^T(T)P(T)x(T) - x^T(0)P(0)x(0) = -J(x_0, u, T) + \int_0^T (u + R^{-1}B^T Px)^T R(u + R^{-1}B^T Px)dt \tag{3.141}$$

これより、

$$J(x_0, u, T) = x^T(0)P(0)x(0) + \int_0^T (u + R^{-1}B^T Px)^T R(u + R^{-1}B^T Px)dt \tag{3.142}$$

となる。上式の右辺第二項は 2 次形式の積分であるから、

$$u(t) = -R^{-1}B^T P(t)x(t) \tag{3.143}$$

である場合に評価関数が最小であることがわかる。証明は (3.57) の方程式の存在の下で行なったが、この方程式を初めて Kalman が導いた時は、古典偏分法を用いておりこれ程簡単ではなかった。

[Q.E.D.]

[定理 3.7 の証明]

$V(x) := x^T Px$ を考える。

$$\dot{V}(x) = (Ax + Bf(-R^{-1}B^T Px))^T Px + x^T P(Ax + Bf(-R^{-1}B^T Px)) \tag{3.144}$$

$$= x^T (PBR^{-1}B^T - Q)x - (2x^T PBf(-R^{-1}B^T Px)) \tag{3.145}$$

ところが条件より、

$$\leq -x^Q x - \epsilon u^T Ru \tag{3.146}$$

となる。 $V(x) \geq 0$ であるから $Hx(\infty) = 0, u(\infty) = 0$ を得る。また、 (H, A) は可検出であるから $x(\infty) = 0$ である。

[Q.E.D.]

[定理 3.8 の証明]

いま $\Delta t(s)$ に二乗可積分な入力 u が入ったときの出力を v とする。このとき、Parseval の定理より

$$\begin{aligned}
2 \int_0^\infty v^T(t)R^{-1}u(t)dt &- \int_0^\infty u^T(t)R^{-1}u(t)dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty U^*(j\omega)(\Delta(j\omega)R^{-1} + R^{-1}\Delta^*(j\omega) - R^{-1})U(j\omega)d\omega \geq 0
\end{aligned} \tag{3.147}$$

となる。一方、任意の $\tau \in [0, \infty)$ に対して、

$$\begin{aligned}
 x_0^T P x_0 &= x^T(\tau) P x(\tau) - \int_0^\tau \frac{d}{dt} (x^T(t) P x(t)) dt \\
 &= x^T(\tau) P x(\tau) - \int_0^\tau (Ax + Bv)^T P x + x^T P (Ax + Bv) dt \\
 &= x^T(\tau) P x(\tau) - \int_0^\tau x^T (PBR^{-1}B^T P - Q)x + 2v^T B^T P x dt \\
 &= x^T(\tau) P x(\tau) - \int_0^\infty x_\tau^T (PBR^{-1}B^T P - Q)x_\tau + 2v^T B^T P x_\tau dt
 \end{aligned}$$

ただし、 x_τ は x を時刻 τ で打ち切った関数である。ここで、 $u = B^T P x_\tau$ とすると (3.147) より、

$$-2 \int_0^\infty v^T(t) R^{-1} B^T P x_\tau dt \geq - \int_0^\infty x^T(t) B P R^{-1} B^T P x_\tau dt \quad (3.148)$$

であるから、

$$\begin{aligned}
 x_0^T(t) P x_0 &= x^T(\tau) P x(\tau) - \int_0^\tau x_\tau^T (PBR^{-1}B^T P - Q)x - 2v^T R^{-1} B^T P x dt \\
 &\geq x^T(\tau) P x(\tau) + \int_0^\tau x^T Q x dt \geq \int_0^\tau x^T Q x dt
 \end{aligned} \quad (3.149)$$

となる。従って、 (H, A) は可検出であるから $x(\infty) = 0$ となる。

[Q.E.D.]

第4章 むだ時間系の制御

本章では、むだ時間系を制御するための簡単で実用的な方法を述べるにとどめ、詳しい解析などは行なわない。また、本章で扱うシステムは原則としてスカラ系である。制御系を設計する時の基本であるが、性能の良い制御を行なうためには、対象のプラントの構造及びパラメータをできるだけ正確に把握することが好ましい。特にむだ時間系を考える場合、むだ時間の長さを正確に知る必要がある。ここでは、モデルが比較的正確に分かっている場合の設計について述べる。

4.0.4 Smith の補償器と IMC 構造

今、プラントの伝達関数がむだ時間要素 e^{-sL} とむだ時間のない伝達関数 $P^*(s)$ の積として、

$$P(s) = P^*(s)e^{-sL} \quad (4.1)$$

で表されたとする。ただし、 L はむだ時間であり、 $P^*(s)$ は安定であるとする。このとき制御系の構成を図 4.0.4 のように構成することを考える。

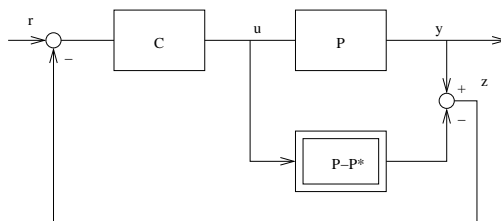


図 4.1: Smith の補償器

この図で、2重のボックスで示された部分は Smith の予測器と呼ばれる。これは、

$$z = Pu - (P - P^*)u = P^*u = ye^{sL} \quad (4.2)$$

となり、 z が出力 y の L 秒先の値を予測しているからである。この時、 r から y までの伝達関数は、

$$\frac{Y}{R} = \frac{CP}{1 + CP^*} = \frac{CP^*}{1 + CP^*} e^{-sL} \quad (4.3)$$

となり、ちょうどむだ時間がない場合の閉ループ伝達関数にむだ時間要素の積という形になる。これより、コントローラ C の設計は、むだ時間とは独立に従来の方法を用いることができることが分かる。ただし、この構造で注意しなければならないことは、 P が安定でなければならないことである。実際、図 4.0.4 を等価変換すると図??を得る。

もし、システム P が不安定である場合、コントローラ側の P の出力と実際の出力がキャンセルされてしまい e には反映されず、全体を安定化することはできない。図??において、 C と P^* の部分を一つのコントローラとして K と考えた時、このような制御系を IMC (Internal Model Control) 構造という。(図 4.0.4)

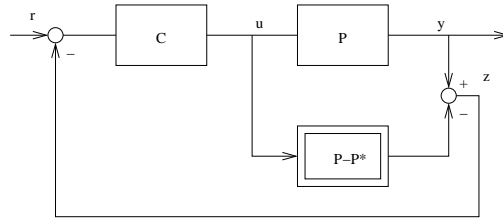


図 4.2: Smith の補償器と等価なシステム

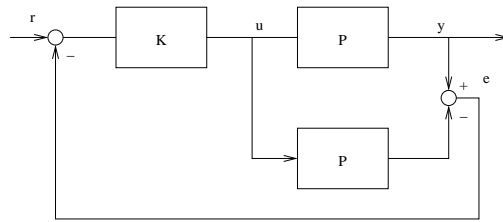


図 4.3: IMC 構造

この構成を用いる場合、ロバスト性をあまり考慮しなくて良い場合には、 K としは P^{-1} にできるだけ近いものを選んだ方が追従特性は良くなることは明らかであろう。更に、IMC の特徴として、コントローラ内部のプラントのモデルを \bar{P} として図 4.0.4 のような構成にしたとき、閉ループ系が安定で、

$$K(0)\bar{P}(0) = 1 \tag{4.4}$$

の条件を満たせばシステムは 1 型のサーボ系となっている。実際、

$$y = \frac{KP}{1 + K(P - \bar{P})}r \tag{4.5}$$

であるから、 $r = c/s$ とすると、最終値定理より、

$$\begin{aligned} y(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{KP}{1 + K(P - \bar{P})} \frac{c}{s} \\ &= \frac{K(0)P(0)}{1 - K(0)\bar{P}(0) + K(0)P(0)}c = c \end{aligned} \tag{4.6}$$

となり出力は目標値に一致する。また、システムの入力部に飽和などの非線形要素がある場合でも、 \bar{P} の前に同じ非線形要素を挿入してコントローラを設計することでシステムをロバスト化することができる。

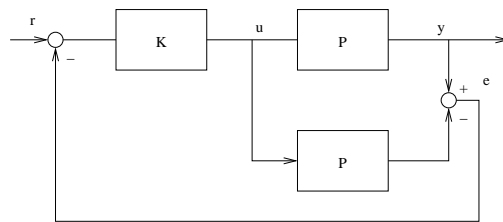


図 4.4: IMC の特徴

4.0.5 むだ時間を用いてシステムを離散化する方法

前節と同じ伝達関数で与えられるプラントを考え、このシステムにゼロ時ホールダを付けて制御することを考える。ただし、プラントは安定でなくとも良く、 T をサンプリングインターバルとして $L = nT$ が成り立つように T を選ぶものとする。この時、ゼロ次ホールダを付けたシステムの伝達関数は図 4.0.5 のように考えることができる。

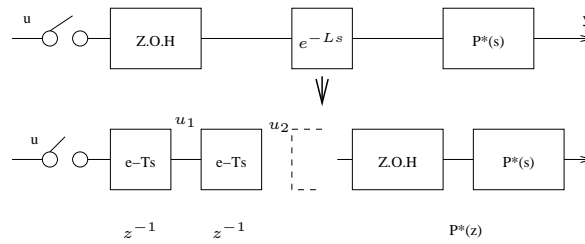


図 4.5: むだ時間要素の分解 1

ここで入力を u 、各むだ時間要素の出力を u_i とし、 $P^*(z)$ の差分状態空間表現を

$$\begin{aligned} x((k+1)T) &= \Phi x(kT) + \Gamma u(kT) \\ y(kT) &= Cx(kT) + Du(kT) \end{aligned}$$

とすれば、 u_i を状態と考えてつぎの拡大系を得る。

$$\begin{bmatrix} x \\ u_n \\ \vdots \\ u_1 \end{bmatrix} ((k+1)T) = \begin{bmatrix} \Phi & \Gamma & & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u_n \\ \vdots \\ u_1 \end{bmatrix} u(kT) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u(kT) \quad (4.7)$$

$$\begin{bmatrix} y \\ u_n \\ \vdots \\ u_1 \end{bmatrix} (kT) = \begin{bmatrix} C & D & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & & & I & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u_n \\ \vdots \\ u_1 \end{bmatrix} (kT) \quad (4.8)$$

また、出力側にむだ時間が存在する場合には図 4.0.5 のように分解して次の拡大系をえる。

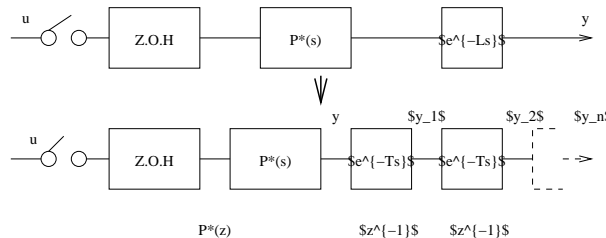


図 4.6: むだ時間要素の分解 2

$$\begin{bmatrix} y_n \\ \cdot \\ y_1 \\ x \end{bmatrix}((k+1)T) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \cdot & \\ & & & 1 \\ & & & 0 & C \\ & & & 0 & \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_n \\ \cdot \\ y_1 \\ x \end{bmatrix}(kT) + \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ 0 \\ D \\ \Gamma \end{bmatrix} u(kT) \quad (4.9)$$

$$y_n(kT) = [1 \ 0 \ \dots] \begin{bmatrix} y_n \\ \cdot \\ y_1 \\ x \end{bmatrix}(kT) \quad (4.10)$$

従って、制御系はこの状態空間表現に基づいて設計すれば良い。

第5章 特異値分解と部分空間同定法

本章では、以下の解析で重要となる特異値分解 (SVD: Singular Value Decomposition) とそれを応用したシステムパラメータの推定法の一つである部分空間同定法について解説する。システムのパラメータを推定する方法には、ここで述べるもの以外にも種々のものが存在するが、本講義で用いている状態空間表現に最も相性の良い部分空間同定法にのみ議論を限定する。実際の同定においては、部分空間同定法が仮定している先見情報よりも多くの情報が使える場合があり、その場合は他の手法を用いた方が推定精度が良い場合が多いということは注意しておく。

5.1 特異値分解 (SVD)

行列を線形変換とみなしたとき、その行列がどのような特性を持っているかを解析する方法の一つが特異値分解である。特異値分解を導出するために、つぎの命題を証明なしに用いる。

[命題]

ノルムをユークリッドノルムで定義するとき、以下の命題が成立する。

1. $x, y \in R^n$ の時、 $\|x\| = \|y\|$ であるための必要十分条件は、あるユニタリー行列 U が存在して $x = Uy$ と表されることである。
2. 行列 M に対して、線形変換を

$$y = Mx$$

で定義するとき、行列 M の行列ノルムを

$$\|M\| = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|y\|}{\|x\|}$$

で定義する。このとき $\|M\| = \|M^*\|$ が成り立つ。ただし、 $*$ は行列の共役転置。

[特異値分解]

任意の行列 $M \in R^{n \times m}$ は次のような形に分解することができる。

$$M = U \Sigma V^* \tag{5.1}$$

ただし、 $U \in R^{n \times n}, V \in R^{m \times m}$ はユニタリー行列で、

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdots & \sigma_r & \cdot & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & 0 & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \sigma_1 \geq \sigma_2 \cdots \geq \sigma_r > 0$$

である。

[証明]

$M \in R^{m \times n}$ ($m \geq n$) とし、 $\bar{\sigma} = \|M\|$ とする。これより、

$$\|Mz\| = \bar{\sigma}\|z\|$$

となる z が存在する。ところが命題より

$$Mz = \bar{\sigma}Uz$$

となる U が存在する。ここで、

$$x := \frac{z}{\|z\|}, \quad y := \frac{Uz}{\|Uz\|}$$

とすると

$$Mx = \bar{\sigma}y$$

が成り立つことになる。 (x, y) のそれぞれのノルムは 1 であることに注意する。) ここで x, y にそれぞれ直行補空間をなすように正規直行基底を並べた U_1, V_1 を取り、 U, V を次のように定義する。

$$U := [x \mid U_1], \quad V := [y \mid V_1]$$

ここで M_1 を次のように定義すると、次のように変形される。

$$\begin{aligned} M_1 &= V^T A U \\ &= \begin{bmatrix} y^T \\ V_1^T \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} x \mid U_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} y^T \\ V_1^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Mx \mid MU_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y^T \\ V_1^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\sigma}y \mid MU_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \bar{\sigma} & w^T \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ここで M_2, w は適当な行列であるが、実は下記のように w はゼロベクトルとなる。なぜなら、 $\|M\| = \|M_1\| = \|M_1^T\|$ であるので、

$$\|M_1^T\| \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \right\|^2 = \left\| \begin{bmatrix} \bar{\sigma} \\ w \end{bmatrix} \right\|^2 = \bar{\sigma}^2 + \|w\|^2$$

従って $\|M\| = \bar{\sigma}$ であるためにな $w = 0$ でなければならない。 M_2 についても同様な変換を行なうことにより、特異値分解を得る。Q.E.D.

この特異値分解の意味は、

$$y = Mx \tag{5.2}$$

なる線形変換を考え、

$$U := [u_1 \cdots u_n], \quad V := [v_1 \cdots v_m], \quad u_i \in R^p, \quad v_i \in R^m$$

とすると、 u_i, v_j は定義域の正規直行基底、値域の正規直行基底になっており

$$y = U\Sigma V^*x = U\Sigma x', \quad x' := V^*x \tag{5.3}$$

ただし、

$$x' := [x'_1 \cdots x'_m]^T = [v_1^* x \cdots v_n^* x]^T$$

で、 x を新しい V の基底で表した座標である。これを用いて、

$$y = U \begin{bmatrix} \sigma_1 x'_1 \\ \cdot \\ \sigma_r x'_r \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

となる。この式は、まず変換されるベクトル x の V 座標系での成分を取り出し、対応する出力は、その成分の特異値倍になることを意味している。これを図で表現するとつぎのようになる。

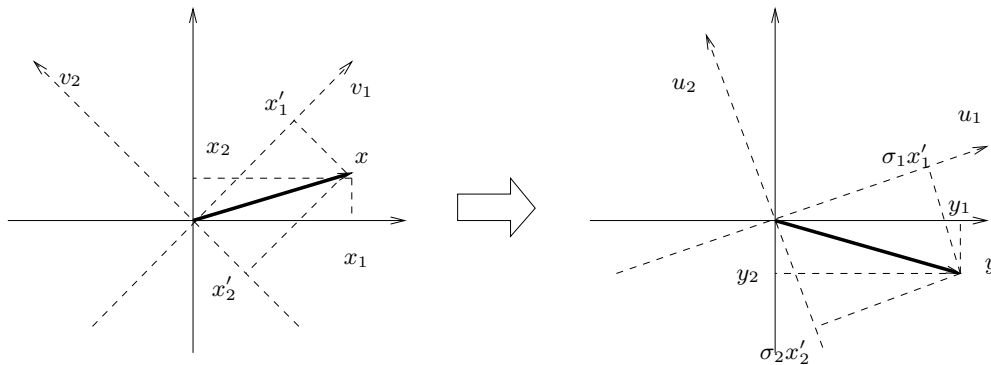


図 5.1: 特異値分解の幾何学的意味

5.2 システムの連続化

今までは、システムが状態空間表現され、その行列のパラメータは何らかの形で与えられると暗に仮定していた。しかし、実際の制御の現場においては、それが予め分からない場合も多い。そのような場合には、システムに実際に信号を入れてみて、その応答からパラメータを推定する必要がある。このように、対象にシステムに信号を入れて、パラメータを推定することをシステム同定という。ここでは、システムのパラメータを、離散時間でのパラメータを同定し、連続時間のシステムのパラメータに変換する方法についてそのアイデアを簡単に説明する。

状態空間表現されたシステムに対して、制御周期 T_s でシステムを離散化した場合、システムは次の状態空間の差分方程式で表されることは 1 章で説明した。

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \Phi x(k) + \Gamma u(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \end{aligned}$$

ただし、

$$\begin{aligned}\Phi &:= e^{AT_s} \\ \Gamma &:= \int_0^{T_s} e^{A\tau} d\tau B\end{aligned}$$

(MATLAB ではこの変換は `c2d()` 関数により計算出来る。) ここで考える問題は、 Φ, Γ が与えられた場合に、そのデータより A, B を計算する問題である。(次の節で、 $(y(k), u(k))$ から Φ, Γ, C, D を求める方法については説明する。)

今、議論を簡単にするために、 A の固有値は単根で全て異なっているとし、ゼロ固有値はないものとする。これより A は相似変換 T により対角化されて

$$T^{-1}AT = \Lambda := \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \lambda_n \end{bmatrix}$$

となり、また逆行列を持つ。

従って、

$$T^{-1}\Phi T = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 T_s} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & e^{\lambda_n T_s} \end{bmatrix} \rightarrow \Phi = T \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 T_s} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & e^{\lambda_n T_s} \end{bmatrix} T^{-1} \quad (5.5)$$

となり、同じ相似変換行列で Φ も対角化される。これより、 A を求めるためにはつぎのようにすれば良いことが分かる。

$$1. \Phi = T \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 T_s} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & e^{\lambda_n T_s} \end{bmatrix} T^{-1} =: T \begin{bmatrix} \lambda'_1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \lambda'_n \end{bmatrix} T^{-1} \text{ と対角化する。}$$

$$2. \lambda_i = \frac{1}{T_s} \text{Log} \lambda'_i \quad (i = 1, \dots, n).$$

$$3. A = T \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \lambda_n \end{bmatrix} T^{-1} \text{ により } A \text{ を求める。}$$

[注意]

$\lambda_i = \sigma_i + j\mu_i$ の場合、 $e^{\lambda_i T_s} = e^{\sigma_i T_s} e^{j\mu_i T_s} = e^{\sigma_i T_s} e^{j(\mu_i + \frac{2\pi}{T_s}n)T_s}$ ($n = \pm 1, \dots$) であるので、連続系が極として $\sigma_i + j(\mu_i + \frac{2\pi}{T_s}n)$ という極を持っていたとしても、 $\sigma_i + j\mu_i$ と区別がつかなくなることに注意する。これは、信号のサンプリングに起因するエイリアシング現象のためである。

一方、 B の方は、 A が逆行列を持っているので

$$\Gamma = A^{-1}(e^{AT_s} - I)B \quad (5.6)$$

となるので、

$$B = (\Phi - I)^{-1}A\Gamma \quad (5.7)$$

によって与えられることが分かる。

このアルゴリズムを一般化した連続化は MATLAB では `d2c()` という関数で実現されている。

5.3 モデルリダクションと部分空間同定法

ここでは、状態方程式のパラメータである (Φ, Γ, C, D) を入出力応答から推定する方法について説明する。そのために必要となる性質を証明なしに述べる。

[命題]

1. 行列 M のフロベニウス (Frobenius) ノルム $\|M\|_F$ 以下の式で定義するとき、

$$\|M\|_F = \sqrt{\sum_{ij} m_{ij}^2} \quad (5.8)$$

次の等式が成り立つ。

$$\|M\|_F^2 = \text{trace}(MM^T) \quad (5.9)$$

2. 行列 X によるスカラー値関数 $f()$ の微分を

$$\frac{\partial f}{\partial X} = \left[\frac{\partial f}{\partial x_{ij}} \right] \quad (5.10)$$

で定義するとき以下の関係が成立する。

$$\frac{\partial}{\partial X} \text{trace}AXB = A^T B^T \quad (5.11)$$

(証明は要素を計算すれば容易に導かれる。)

システムが式 (5.5) で与えられるとき、次の式で与えられる行列 h_i をマルコフ (Markov) パラメータという。

$$h_i := \begin{cases} 0 & (i < 0) \\ D & (i = 0) \\ C\Phi^{i-1}\Gamma & (i \geq 1) \end{cases} \quad (5.12)$$

このマルコフパラメータが与えられるとき、 (Φ, Γ, C, D) を求める問題をシステムの実現問題という。

5.3.1 マルコフパラメータからの推定とモデルリダクション

今、次のハンケル (Hankel) 行列 H を定義する。ただし、ここではシステムの次元 n は既知であるとする。

$$H := \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & \cdots & h_{n+1} \\ h_2 & h_3 & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ h_{n+1} & \cdot & \cdots & h_{2n+1} \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

この行列は可制御行列 V_{n+1} と可観測行列 N_{n+1} を用いて次のように分解することができる。

$$H = N_{n+1}V_{n+1} \quad (5.14)$$

ただし V_n, N_n は次のように定義される。

$$N_n := \begin{bmatrix} C \\ C\Phi \\ \cdot \\ \cdot \\ C\Phi^{n-1} \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

$$V_n := \begin{bmatrix} \Gamma & \Phi\Gamma & \cdots & \Phi^{n-1}\Gamma \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

ここで、 $N_{1:n}, N_{2:n+1}$ を次のように定義すると、

$$N_{1:n} := \begin{bmatrix} C \\ C\Phi \\ \cdot \\ \cdot \\ C\Phi^{n-1} \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

$$N_{2:n+1} := \begin{bmatrix} C\Phi \\ \cdot \\ \cdot \\ C\Phi^n \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

つまり N_{n+1} の一番下のブロックと一番上のブロックを取り除いたものを考えると、次の関係が得られる。

$$N_{2:n+1} = N_{1:n}\Phi \quad (5.19)$$

この関係は Φ 推移不変性 (Φ -shift invariance) と言われ、 $N_{2:n+1}$ が Φ を $N_{1:n}$ に右から作用させたもののみから構成されることを意味している。このような性質を持つ部分空間を取り出してシステムを同定することがから、このような手法に基づいた同定法を部分空間同定法と呼んでいる。

今マルコフパラメータに基づくハンケル行列 H が与えられたとすると、そのシステムパラメータは次の手順で求めることができる。

1. $\Phi = N_{1:n}^\dagger N_{2:n+1}$. ただし、 \dagger は疑似逆行列を表す。
2. $\Gamma = V_n(:, 1:m)$.
3. $C = N_n(1:p, :)$.
4. $D = h_0$.

n よりも小さな次数のシステムで近似する場合には、次のようにハンケル行列を特異値分解する。

$$H = V\Sigma U^T = [V_s \ V_n] \begin{bmatrix} \Sigma_s & \\ & \Sigma_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_s^T \\ U_n^T \end{bmatrix} \approx V_s \Sigma_s U_s^T$$

ただし、 Σ_n は小さな特異値からなる対角行列である。ここで、 $N_n \rightarrow V_s \sqrt{\Sigma_s}, V_n \rightarrow \sqrt{\Sigma_s} U_s^T$ とすれば、次数が減少したシステムが得られ、モデルリダクションされる。

5.3.2 インパルス応答からの同定

今特殊な入力として、各入力チャンネルに初期時刻だけ 1 でそれ以外の時刻では零の入力を入れることができると仮定する。するとこれより、マルコフパラメータの推定値 \hat{h}_i が得られ、対応するハンケル行列 $\hat{H} \in R^{\alpha p \times \beta m}$ を計算することができる。ただし、 $\alpha \geq n+1, \beta \geq n+1$ となるように十分大きく取る。

ここで \hat{H} を特異値分解すると

$$\hat{H} = \hat{U} \hat{\Sigma} \hat{V}^T \quad (5.20)$$

ただし、

$$\hat{U} = [\hat{U}_s \hat{U}_n] \quad (5.21)$$

$$\hat{V} = [\hat{V}_s \hat{V}_n] \quad (5.22)$$

$$\hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} \hat{\Sigma}_s & \\ & 0 \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

である。ここで

$$N_\alpha := \hat{U}_s \quad (5.24)$$

$$V_\beta := \hat{\Sigma}_s \hat{V}_s^T \quad (5.25)$$

とすれば、 N_α は N_{n+1} と同様の性質があると考えられるので、

$$\hat{U}_{2:\alpha} \approx \hat{U}_{1:\alpha-1} \hat{\Phi} \quad (5.26)$$

が成り立つ Φ が存在する。 ($N_\alpha := \hat{U}_s \Sigma^{1/2}$, $V_\beta := \Sigma^{1/2} \hat{V}_s^T$ としても良い。) ただし、システムの次数は $\hat{\Sigma}_s$ の次元であることに注意する。この $\hat{\Phi}$ は次の評価関数を最小化する最小自乗法によって決定することができる。

$$J := \|\hat{U}_{2:\alpha} - \hat{U}_{1:\alpha-1} \hat{\Phi}\|_F^2 \quad (5.27)$$

この最小自乗解は $X = \hat{\Phi}$, $A = \hat{U}_{2:\alpha}$, $B = \hat{U}_{1:\alpha-1}$ とおくと、

$$\begin{aligned} J &= \text{trace}(A - BX)(A - BX)^T \\ &= \text{trace}(AA^T) - 2\text{trace}(BXA^T) + \text{trace}(BXX^TB^T) \end{aligned} \quad (5.28)$$

であるので、最小自乗推定の必要条件より、命題の行列での $\text{trace}()$ の微分の性質を使うと

$$\frac{\partial}{\partial X} J = -2B^T A + 2B^T B X = 0 \quad (5.29)$$

となり、 $\hat{\Phi}$ は次の式で与えられる。

$$\hat{\Phi} = (B^T B)^{-1} B^T A = B^\dagger A \quad (5.30)$$

他のパラメータに関しては前節と同様に計算することができる。

5.3.3 一般の入出力からの同定

アルゴリズムを説明するために次の大きな縦ベクトルを定義する。

$$y_k := \begin{bmatrix} y(k) \\ y(k+1) \\ \vdots \\ y(k+\alpha-1) \end{bmatrix}, \quad u_k := \begin{bmatrix} u(k) \\ u(k+1) \\ \vdots \\ u(k+\alpha-1) \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

この y_k, u_k を用いると次の関係式が得られる。

$$y_k = N_\alpha x(k) + \Psi_\alpha u_k \quad (5.32)$$

ただし、

$$N_\alpha = \begin{bmatrix} C \\ C\Phi \\ \vdots \\ C\Phi^{\alpha-1} \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

$$\Psi_\alpha := \begin{bmatrix} D & & & \\ C\Gamma & D & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ C\Phi^{\alpha-2}\Gamma & \vdots & \vdots & D \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

である。

ここで更に大きな行列 Y, U, X を次のように定義する。

$$Y := [y_1 \ y_2 \ \cdots \ y_N] \quad (5.35)$$

$$U := [u_1 \ u_2 \ \cdots \ u_N] \quad (5.36)$$

$$X := [x(1) \ x(2) \ \cdots \ x(N)] \quad (5.37)$$

この行列を用いると次の関係式が成り立つ。

$$Y = N_\alpha X + \Psi_\alpha U \quad (5.38)$$

この関係から最終的に欲しいのは N_α であるが、もし Ψ_α が既知であれば Y から $\Psi_\alpha U$ を引き算し、残りの特異値分解を行えば所望のものが得られる。しかし、 Ψ_α が未知であるためそのままでは実行できない。そこで、 U の項を消去するために次の行列を考える。

$$\Pi_{U^T}^\perp := I - U^T(UU^T)^{-1}U \quad (5.39)$$

この行列は $U\Pi_{U^T}^\perp = 0$ という性質を持っているため、式 (5.38) の右から $\Pi_{U^T}^\perp$ を掛けると

$$Y\Pi_{U^T}^\perp = N_\alpha X\Pi_{U^T}^\perp \quad (5.40)$$

となり、 U の影響を除去できる。

この結果は次のように理解することもできる。 $Y - \Psi_\alpha U$ を推定するために、まず Ψ の推定値を考える。 X が零の場合の Ψ_α の最小自乗推定は次の評価関数

$$J = \|Y - \Psi_\alpha U\|_F^2 \quad (5.41)$$

の最適解で与えられるため、その最適推定値は

$$\hat{\Psi}_\alpha = YU^\dagger \quad (5.42)$$

で与えられ、

$$Y - \hat{\Psi}_\alpha U = Y\Pi_{U^T}^\perp \quad (5.43)$$

と表現できると考えるのである。

いずれにせよ、 $Y\Pi_{U^T}^\perp$ は $N_\alpha X$ の性質を表しているのので、これを特異値分解すると、

$$Y\Pi_{U^T}^\perp = \hat{U}_s \hat{\Sigma}_s \hat{V}_s^T + \hat{U}_n \hat{\Sigma}_n \hat{V}_n^T \quad (5.44)$$

となる。ノイズの成分を無視し、

$$\hat{N}_\alpha = \hat{U}_s \quad (5.45)$$

とすれば、前と同じように $\hat{\Phi}, C$ が分かる。

一方、 (Γ, D) に関しては、式 (5.38) より

$$Y = N_\alpha X + \Psi_\alpha \approx \hat{N}_\alpha X' + \Psi_\alpha U = \hat{U}_s X' + \Psi_\alpha U \quad (5.46)$$

となる。ただし、 X' は X に N_α から \hat{N}_α に変化する座標変換の逆変換を X 施したものである。ここで \hat{U}_n^T を左から掛けると \hat{U} の要素の直交性より

$$\hat{U}_n^T Y = \hat{U}_n^T \Psi_\alpha U \rightarrow \hat{U}_n^T Y U^\dagger = \hat{U}_n^T \Psi_\alpha \quad (5.47)$$

となる。ここで、

$$\hat{U}_n^T =: [a_1 \ a_2 \ \cdots; a_\alpha] \quad (5.48)$$

$$\hat{U}_n^T Y U^\dagger =: [b_1 \ b_2 \ \cdots; b_\alpha] \quad (5.49)$$

と定義すると、式 (5.47) は次の方程式と等価である。

$$b_1 = a_1 h_0 + a_2 h_1 + \cdots + \cdot + a_\alpha h_{\alpha-1} \quad (5.50)$$

$$b_2 = a_2 h_0 + a_3 h_1 + \cdots + a_\alpha h_{\alpha-2}$$

...

$$b_\alpha = a_\alpha h_0 \quad (5.51)$$

これを行列表現すると

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & \cdot & a_\alpha \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_\alpha & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & & & & \\ a_\alpha & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ h_{\alpha-1} \end{bmatrix} \quad (5.52)$$

となる。一方、

$$\begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ h_{\alpha-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D \\ C \\ C\Phi \\ \cdot \\ C\Phi^{\alpha-2} \end{bmatrix} \Gamma = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & N_{\alpha-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D \\ \Gamma \end{bmatrix} \quad (5.53)$$

であるので、

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & \cdot & a_\alpha \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{\alpha-1} & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & & & & \\ a_1 & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & N_{\alpha-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D \\ \Gamma \end{bmatrix} \quad (5.54)$$

となる。これより、

$$\begin{bmatrix} \hat{D} \\ \hat{\Gamma} \end{bmatrix}$$

を変数行列とした最小自乗推定を行なえば望みの行列が得られることになる。この方法を基本とした手法は MATLAB では `n4sid()` という関数で実行できる。

参考文献

1章

1. 増淵 正美:モデリングと制御系設計、計測と制御、Vol. 27,No. 4
2. 古田, 佐野:基礎システム理論、(コロナ社)
3. I.Sandberg:Linear Maps and Impulse Responses,IEEE Trans. on Circuits and Systems, Vol. 35, No. 2,(1988)
4. 絹川 正吉:フーリエ解析 例題演習、(北森出版)
5. 長谷川健介:制御理論入門、(昭晃堂)
6. 児玉、須田:システム制御のためのマトリックス理論、計測自動制御学会
7. J.R.Leigh: Functional Analysis and Linear Control Theory, Academic Press,(1980)
8. 須田 信英:極と零点、計測と制御、Vol. 17,No6,No8,(1978)
9. 池田 雅夫:Descriptor 形式に基づくシステム理論、計測と制御、Vol. 24, No. 7,(1985)
10. 木村 英紀:LQG から H^∞ へ、計測と制御、Vol. 29, No. 2,(1990)
11. 三平、美多:状態空間による H^∞ 制御の解法、計測と制御、Vol. 29, No. 2,(1990)
12. B.A.Francis:A Course in H_∞ Control Theory, Springer-Verlag(1987)
13. M.Vidyasagar:Control System Synthesis, MIT Press(1985)

2章

1. 古田, 佐野:基礎システム理論、(コロナ社)
2. M.Vidyasagar:Control System Synthesis,Appendix,The MIT Press,(1985)
3. J.R.Leigh:Functional Analysis and Linear Control Theory,Academic Press,(1980)
4. 計測自動制御学会編:自動制御ハンドブック、(オーム社)
5. V.L.Kharitonov:Asymptotic Stability of Systems of Linear Differential Equations,Differensial'nye Uravneniya,Vol. 14, No. 11,(Translations)(1978)
6. S.Bialas:A Necessary and Sufficient Condition for the Stability of Convex Combination of Stable Polynomials or Matrices,Bulletion of The Polish Academy of Sciences Technical Sciences, Vol. 33, No. 9-10,(1985)
7. R.E.Kalman,J.E.Bertram:Control System Analysis and Design, Trans. of the ASME, June,(1960)
8. J.P.Lasalle:Some Extensions of Liapunov Second Method, IRE. Trans. on Circuit Theory,(1960)
9. G.Zames:On the Input-Output Stability fo Time-Varing Nonlinear Feedback Systems;Part I Conditions Derived Using Concepts of Loop Gain, Conicity, and Positivity, IEEE. Trans. on A.C. (1966)

10. 須田 信英:極と零点、計測と制御、Vol. 17,No6,No8,(1978)
11. H.H.Rosenbrock:State-Space and Multivariable Theory,Nelson,London,(1970)
12. B.A.Francis:Lecture Notes in Control and Information,Springer-Verlag,(1987)

3章

1. W.M.Wonham:On Pole Assigment in Multiinput Controllable Linear System, IEEE. Trans. on A.C.,(1967)
2. 木村 英紀:多変数系の理論と応用 I VIII, システムと制御、(1978)
3. 須田 信英:Hamilton 行列と Riccati 代数方程式、計測と制御、Vol. 29, No. 2,(1990)
4. 木村、藤井:多変数系の理論と応用 II、システムと制御、(1978)
5. 古田、原:サーボ技術と現代制御論、計測と制御、Vol. 19, No. 10,(1975)

4章

1. M.Morari, E.Zafiriou:Robust Process Control, Prentice-Hall(1989)
2. 古田:デジタル制御と制御理論、コンピュータロール, No.27, コロナ社 (1989)
3. K.Ymanaka etc.:Effects of Mismatched Smith Controller on Stability in Systems with Time-delay, Automatica, Vol. 23, No. 6(1987)
4. Y.A.Fiagbedzi, A.E.Pearson:A Multistage Reduction Technique for Feedback Stabilizing Distributed Time-lag Systems, ibid (1987)

5章

1. K.Zhou and J.C.Dyole : Essentials of Robust Control, Sec. 2.6, Prentice-Hall(1998)
2. 千葉:関数解析, 5章24節, 節倍風館 (1982)
3. M.Viberg: 'Subspace-based Methods for the Identification of Lnear Time-invariant Systems', Automatica, Vol.31, No.12, pp.1835/1851 (1995)
4. 和田: '部分空間同定法って何?', 計測と制御,Vol. 36, No. 8, pp.569/574(1997)